INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

Technische Universität Braunschweig

Prof. Dr. Wolfram Brenig
Erik Wagner

Thermodynamik und Quantenstatistik WS 2019/20

13. Übungsblatt

Abgabe: Di, 04.02.2020 bis 11:30 Uhr, Kasten neben A316

Übungsblätter gibt es unter `https://www.tu-braunschweig.de/theophys/lehrveranstaltungen/wintersemester-2019/20/thermodynamik`.

51. **Wissensfragen (2 Punkte)**

    Bitte benennen Sie alle verwendeten Symbole und antworten Sie in vollständigen Sätzen.

    (a) Was sind Phononen? Welcher Verteilungsfunktion unterliegen sie?

52. **Einstein-Phononen (4 Punkte)**

    In Festkörpern mit mehr als einem Atom pro Gitterpunkt treten neben den in der Vorlesung behandelten akustischen Phononen, die mit der Debye-Theorie näherungsweise beschrieben werden, noch optische Phononen auf. Die einfachste Beschreibung der optischen Phononen geht auf Einstein zurück und geht von einer Phononenzustandsdichte $\Omega(\omega) = 3N\delta(\omega - \omega_E)$ aus (ω_E ist eine konstante Frequenz, N ist die Gesamtzahl der Atome).

    (a) Berechnen Sie die mittlere Energie der Phononen.

    (b) Berechnen Sie die spezifische Wärme. Zeigen Sie, dass sich die Phononen bei hohen Temperaturen gemäß der Regel von Dulong und Petit verhalten.

53. **Weiße Zwerge (9 Punkte)**

    Weiße Zwerge sind das „Endstadium“ von Sternen in denen sämtliche Fusionsprozesse aufgehört haben. Sie können als Fermigas bei $T \approx 0$ mit den zugehörigen Ionrümpfen angesehen werden. Die Statistik der Ionen bleibt unberücksichtigt.

    (a) Zeigen Sie, dass für den Druck P_e im Elektronengas gilt

    $$P_e = \frac{\hbar^2}{15 m_e \pi^2} \left(3\pi^2 \rho_e\right)^{5/3} \ ,$$

    wobei m_e die Elektronenmasse und ρ_e die Dichte des Elektronengases ist.

    (b) Nehmen Sie an, dass der Stern eine konstante Dichte ρ besitzt. Dann ist seine Gravitations(selbst)energie E_G gegeben durch

    $$E_G = -\frac{3GM^2}{5R} \ ,$$

    wobei M die Masse und R der Radius des Sterns sowie G die Gravitationskonstante ist. Zeigen Sie, dass dann der Gravitationsdruck P_G durch

    $$P_G = -\frac{1}{5}\left(\frac{4\pi}{3}\right)^{1/3} G M^{2/3} \rho^{4/3}$$

    gegeben ist.

Bitte wenden! →

(c) Im Gleichgewicht entspricht der Druck des Elektronengases dem Gravitationsdruck des Sterns: $P_e = -P_G$. Zeigen Sie, dass dann für das Volumen V des Sterns

$$V = k\frac{1}{M}$$

gilt, wobei k eine Konstante ist.
Berechnen Sie k unter der Vereinfachung, dass die Ionen nur aus Protonen mit Masse $m_H \gg m_e$ bestehen.

(d) **Chandrasekhar Grenze:** Ist ein weißer Zwerg so massiv, dass die kinetische Energie des überwiegenden Teils der Elektronen so groß ist, dass sie sich mit nahezu Lichtgeschwindigkeit c bewegen, dann gilt für ihre Dispersion $\epsilon_\mathrm{p} = pc$. Dabei ist $\mathbf{p}$ der Impuls der Elektronen und $p = |\mathbf{p}|$ dessen Betrag.
Zeigen Sie analog zu (a), dass dann der Druck des Elektronengases durch

$$P_e = \frac{\hbar c}{4}\left(3\pi^2\right)^{1/3}\rho_e^{4/3}$$

gegeben ist.
Was folgt daraus für die Masse des Sterns? Wie groß ist diese Masse relativ zur Sonnenmasse $M_\odot$?

54. **Pauli-Paramagnetismus (15 Punkte)**

In einem äußeren Magnetfeld sind die Einteilchenenergien eines nicht wechselwirkenden Fermigases $\epsilon_\sigma(p)$ für die beiden Spinrichtungen $\sigma = \pm 1$ (parallel oder antiparallel zum Magnetfeld) unterschiedlich:

$$\epsilon_\sigma(p) = \frac{p^2}{2m} - \sigma\mu_B B.$$

Wobei μ_B das Bohr'sche Magneton ist. Für beide Spineinstellungen ergeben sich damit unterschiedliche Besetzungszahlen $\langle n_\sigma(p)\rangle$ bei gleichem chemischen Potential μ. Die Magnetisierung und Suszeptibilität sind definiert durch

$$M = \mu_B\left(\langle N_+\rangle - \langle N_-\rangle\right) \text{ mit } N_\sigma = \sum_p n_\sigma(p)$$

und

$$\chi = \chi(T, B) = \left.\frac{\partial M}{\partial B}\right|_{T,N}$$

(a) Zeigen Sie $\chi(T, B \to 0) = \mu_B^2 \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\epsilon\, \Omega'(\epsilon)\, n(\epsilon)$, wobei $\Omega(\epsilon)$ die Zustandsdichte und $n(\epsilon)$ die Fermiverteilung zum chemischen Potential $\mu(T)$ ist.

(b) Zeigen Sie mit Hilfe der Sommerfeldentwicklung $\mu(T) = \epsilon_F - \frac{\pi^2 k_B^2 T^2}{12\epsilon_F}$ für ein Elektronengas mit $\epsilon = \frac{p^2}{2m}$ und Fermienergie ϵ_F.
Hinweis: Drücken Sie die Zustandsdichte $\Omega(\epsilon)$ durch die Energie ϵ, die Fermienergie ϵ_F und die Teilchenzahl N aus.

(c) Entwickeln Sie mit der Sommerfeld'schen Methode $\chi(T, 0)$ bis zur Ordnung T^2. Die Gesamtteilchenzahl N ist natürlich vorgegeben, sodass die in Aufgabenteil (b) berechnete Temperaturabhängigkeit von μ zu berücksichtigen ist.