



10. Übungsblatt

Abgabe: keine Abgabe

Fragen zu den Aufgaben: Uwe Motschmann, Raum 3.312, Tel.: 391-5186, u.motschmann@tu-bs.de

21. Freier zentraler Fall in der Schwarzschild-Metrik

Der zentrale Fall eines massiven Körpers soll untersucht werden.

(a) Zeigen Sie zunächst

$$\frac{dr}{d\tau} = -\frac{c}{\sqrt{3}} \sqrt{3\frac{r_G}{r} - 1} \quad (1)$$

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{c}{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{r_G}{r}\right) \sqrt{3\frac{r_G}{r} - 1} \quad , \quad (2)$$

 wenn der zentrale Fall mit der Geschwindigkeit null bei $r(\tau = 0) = 3r_G$ beginnt.

- (b) Lösen Sie die Differentialgleichung (1). Skizzieren Sie $r(\tau)$. Wie lange benötigt der Körper für den Sturz ins Zentrum?
- (c) Lösen sie die Differentialgleichung (2) bei $r \approx r_G$ indem Sie die rechte Seite bei $r = r_G$ in eine Taylor-Reihe bis zur linearen Ordnung entwickeln und dann die resultierende lineare Differentialgleichung lösen. Was beobachtet ein entfernter Beobachter mit der Zeit t bei Annäherung des Körpers an r_G ?

22. Isotrope Koordinaten

 Überführen Sie die Schwarzschild-Metrik von den Standard-Koordinaten $(r, \vartheta, \varphi, ct)$ in isotrope Koordinaten $(\rho, \vartheta, \varphi, ct)$ mittels der Transformation

$$r = \left(1 + \frac{r_G}{4\rho}\right)^2 \rho \quad . \quad (3)$$