



10. Übungsblatt

Abgabe: Di, 14.01.2020 bis 11:30 Uhr, Kasten neben A316

Übungsblätter gibt es unter <https://www.tu-braunschweig.de/theophys/lehrveranstaltungen/wintersemester-2019/20/thermodynamik>.

39. **Wissensfragen (5 Punkte)**

Bitte benennen Sie alle verwendeten Symbole und antworten Sie in vollständigen Sätzen.

- Unter welchen Voraussetzungen gilt die Clausius-Clapeyron-Gleichung?
- Wie viel Gramm Salz müssen in einem Liter Wasser gelöst werden, damit der Siedepunkt um ein Kelvin steigt? Nehmen Sie an, dass der Dampfdruck von Salz gegenüber dem von Wasser vernachlässigbar klein ist. Beachten Sie die Dissoziation von Salz in Wasser.
- Geben Sie den Hamilton-Operator eines
 - harmonischen Oszillators in der Besetzungszahldarstellung
 - starrten Kreiselsan.

40. **Clausius-Clapeyron und der Tripelpunkt von Wasser (5 Punkte)**

- Bestimmen Sie approximativ den Tripelpunkt von Wasser mit Hilfe der unten angegebenen Messdaten. Verwenden Sie dazu $p(T)$ in linearer Näherung, d. h. $p(T) \approx p_0(T_0) + \frac{dp}{dT}(T - T_0)$. Geben Sie zum Vergleich den Literaturwert für Temperatur und Druck am Tripelpunkt an.
- Was gilt für die intensiven Variablen am Tripelpunkt?

Messdaten für Wasser:

- Der Dampfdruck von Wasserdampf bei zwei verschiedenen Temperaturen beträgt $p_1 = 6,105 \times 10^2$ Pa bei $T_1 = 0$ °C und $p_2 = 6,567 \times 10^2$ Pa bei $T_2 = 1$ °C.
- Die spezifischen Volumina von Eis und Wasser sind bei $T_0 = 0$ °C und $p_0 = 1,013 \times 10^5$ Pa gegeben durch $v_{\text{Eis}} = 1,091 \times 10^{-3}$ m³/kg, sowie $v_{\text{Wasser}} = 1,000 \times 10^{-3}$ m³/kg.
- Die latente Wärme von Eis ist $q = 334,94$ $\frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$.

Bitte wenden! →

41. Zweiatomiges ideales Gas (12 Punkte)

Wir betrachten ein ideales Gas bestehend aus zweiatomigen Molekülen. In diesem trägt neben der kinetischen Energie der Translation auch die kinetische Energie der Rotation sowie die Schwingungsenergie des Moleküls zur Gesamtenergie eines Teilchens bei:

$$\epsilon(p, j, n) = \frac{p^2}{2(m_1 + m_2)} + \frac{\hbar^2 j(j+1)}{2I} + \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right)$$

Im Folgenden sollen die Beiträge der Rotation und der Schwingung des Moleküls zur Zustandssumme berechnet werden:

- (a) Der Rotationsanteil der Zustandssumme Z_{rot} ist (unter Berücksichtigung der Entartung) gegeben durch

$$Z_{\text{rot}} = \sum_{j=0}^{\infty} (2j+1) e^{-\frac{\theta_r}{2T} j(j+1)},$$

wobei $\theta_r = \frac{\hbar^2}{kI}$ die charakteristische Temperatur des Rotationssystems ist.

- i. Für niedrige Temperaturen lässt sich die Summe durch die ersten Terme abschätzen:

$$\lim_{T \ll \theta_r} Z_{\text{rot}} = 1 + 3 e^{-\theta_r/T} + \dots$$

Geben Sie hierfür eine einfache Begründung.

- ii. Für hohe Temperaturen lässt sich mithilfe der Euler'schen Summenformel die Summe näherungsweise durch ein Integral ersetzen und der Rest abschätzen:

$$\int_{j_0}^{j_1} f(j) dj = \sum_{j_0}^{j_1} f(j) - \frac{1}{2} [f(j_0) + f(j_1)] + \frac{1}{12} [f'(j_0) - f'(j_1)] - \frac{1}{720} [f'''(j_0) - f'''(j_1)] + \dots$$

Zeigen Sie hiermit, dass gilt:

$$\lim_{T \gg \theta_r} Z_{\text{rot}} = 2 \frac{T}{\theta_r} + \frac{1}{3} + \frac{1}{30} \frac{\theta_r}{T} + \dots$$

- iii. Berechnen Sie aus den obigen Näherungen die Energie E_{rot} und die spezifische Wärmekapazität $C_{V,\text{rot}}$. Entwickeln Sie $C_{V,\text{rot}}$ bei hohen Temperaturen bis zur zweiten Ordnung in $\frac{\theta_r}{T}$.

Skizzieren Sie den Verlauf $C_{V,\text{rot}}/Nk$ in Abhängigkeit von $\frac{\theta_r}{T}$.

- (b) Der Schwingungsanteil der Zustandssumme Z_{osc} ist gegeben durch

$$Z_{\text{osc}} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{\theta_v}{T} (n + \frac{1}{2})},$$

wobei $\theta_v = \frac{\hbar\omega}{k}$ die charakteristische Temperatur des Schwingungssystems ist.

- i. Berechnen Sie die Summe mithilfe einer geometrischen Reihe und anschließend die Energie E_{osc} .

Bitte wenden! →

ii. Entwickeln Sie die E_{osc} für hohe und niedrige Temperaturen. Zeigen Sie, dass gilt:

$$\lim_{T \ll \theta_v} E_{\text{osc}} = Nk\theta_v \left(e^{-\theta_v/T} + \frac{1}{2} + \dots \right)$$
$$\lim_{T \gg \theta_v} E_{\text{osc}} = NkT \left(1 + \frac{1}{12} \left(\frac{\theta_v}{T} \right)^2 - \frac{1}{720} \left(\frac{\theta_v}{T} \right)^4 + \dots \right)$$

iii. Berechnen Sie damit die spezifische Wärmekapazität $C_{V,\text{osc}}$ und skizzieren Sie diese.

iv. Skizzieren Sie den Verlauf der Wärmekapazität des gesamten Systems (Translation, Rotation und Schwingung) unter der Annahme, dass $\theta_v \gg \theta_r$.

Was bedeutet Ihr Ergebnis?

42. Virialentwicklung (8 Punkte)

Die Wechselwirkung der Teilchen eines Gases werde näherungsweise durch folgendes Potential beschrieben:

$$w(r) = \begin{cases} \infty & \text{wenn } r \leq d \\ -\epsilon & \text{wenn } d < r \leq 2d \\ 0 & \text{wenn } 2d < r \end{cases}$$

(a) Berechnen Sie für dieses Potential den (klassischen) zweiten Virialkoeffizienten.

(b) Stellen Sie damit die Zustandsgleichung $P = P(N, V, T)$ auf.

(c) Berechnen Sie dann die Energie $E = E(N, V, T)$ und die spezifische Wärme C_V in gleicher Ordnung.