Prof. Dr. Wolfram Brenig
Erik Wagner

9. Übungsblatt

Abgabe: Di, 07.01.2020 bis 11:30 Uhr, Kasten neben A316

Übungsblätter gibt es unter `https://www.tu-braunschweig.de/theophys/lehrveranstaltungen/wintersemester-2019/20/thermodynamik`.

32. **Wissensfragen (3 Punkte)**

Bitte benennen Sie alle verwendeten Symbole und antworten Sie in vollständigen Sätzen.

(a) Die Buchstaben des Wortes TANNENBAUM seien zufällig angeordnet. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass alle drei N am Anfang stehen.

(b) Erklären Sie, warum beim idealen Gas $C_p > C_V$ ist.

(c) Wie verhält sich die Entropie eines isolierten Systems, in dem noch Prozesse ablaufen? Was kann über die Entropie nach Erreichen des Gleichgewichts gesagt werden?

33. **Thermodynamische Relationen (9 Punkte)**

Thermodynamische Relationen ermöglichen es die Änderungen bestimmter Zustandsgrößen in die Änderungen von anderen Zustandsgrößen umzurechnen. Dies ist u. a. dann nützlich, wenn bestimmte Größen leichter zu bestimmen sind (ob experimentell oder theoretisch) als andere. Beweisen Sie folgende Relationen:

(a)

$$C_p = \frac{TV\alpha^2}{\kappa_T - \kappa_S}$$

sowie:

$$C_V = \frac{TV\alpha^2\kappa_S}{(\kappa_T - \kappa_S)\kappa_T}$$

mit $\alpha = \frac{1}{V}\frac{\partial V}{\partial T}$, $\kappa_S = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_S$ und $\kappa_T = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T$.

(b)

$$\left(\frac{\partial C_P}{\partial P}\right)_{T,N} = -TV\left(\alpha^2 + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial T}\right)_{P,N}\right)$$

(c)

$$\left(\frac{\partial \kappa_T}{\partial T}\right)_{P,N} = -\left(\frac{\partial \alpha}{\partial P}\right)_{T,N}$$

Bitte wenden! →

34. **Gleichgewichte in inhomogenen Feldern – Barometrische Höhenformel II (9 Punkte)**

Für Systeme, die sich in äußeren Kraftfeldern (z. B. Schwerefelder oder elektrische Kraftfelder) befinden, kennen Sie aus der Vorlesung die Bestimmungsgleichung des Druckes $P(\vec{r})$ als

$$\mu = \tilde{\mu}(P(\vec{r}), T) + u(\vec{r}) = \text{const}, \tag{1}$$

wobei $u(\vec{r})$ das Potential eines Teilchens im äußeren Feld ist.

(a) Zeigen Sie mithilfe von Gleichung (1) unter Verwendung der Duhem-Gibbs-Relation für $\tilde{\mu}(P, T)$, sowie bei angenommener konstanter Temperatur T, dass folgender Zusammenhang zwischen dem Druckgradienten und der äußeren Kraft pro Volumeneinheit gegeben ist:

$$\operatorname{grad} P(\vec{r}) = -n(\vec{r}) \operatorname{grad} u(\vec{r}),$$

wobei $n(\vec{r})$ die Teilchendichte ist.

(b) Leiten Sie für das ideale Gas mithilfe der Beziehung aus Aufgabenteil (a) die barometrische Höhenformel her.

(c) Geben Sie die Höhenabhängigkeit des Druckes $P = P(z)$ einer inkompressiblen Flüssigkeit ($n = n_0 = \text{const}$) an.

35. **Elektronenaustritt (9 Punkte)**

Wir betrachten ein Elektronengas, welches sich außerhalb eines Metalls befindet und mit den Leitungselektronen innerhalb des Metalls im thermischen Gleichgewicht bei der Temperatur T stehen soll. Das chemische Potential der Elektronen im Metall sei um die Austrittsarbeit Φ unterhalb der Energie eines freien Elektrons im Unendlichen. Die Dichte der Elektronen außerhalb des Metalls sei gering, so dass diese als klassisch angesehen werden können. Das chemische Potential sei nicht temperaturabhängig.

(a) Berechnen Sie das chemische Potential eines freien idealen Gases mit möglicher Doppelbesetzung eines Zustandes (Spin up – Spin down) aus der Zustandssumme $Z = 2^N Z_{\text{id}}$. Wobei Z_{id} die Zustandssumme des idealen Gases ist. Verwenden Sie hierzu die Stirlingformel in der Ihnen bekannten Näherung $N! \approx \left(\frac{N}{e}\right)^N$.

(b) Stellen Sie die Gleichgewichtsbedingung auf.

(c) Berechnen Sie die Anzahl der Elektronen pro Volumeneinheit in Abhängigkeit vom Potential Φ und der Temperatur T.

36. **Simulation der Brown'schen Bewegung mithilfe eines Random Walks (15 Bonuspunkte)**

Wir wollen die zufällige Bewegung eines einzelnen Teilchens z. B. in einer Suspension beschreiben. Dazu nehmen wir an, dass das Teilchen während seiner Bewegung durch Stöße mit der Umgebung seine Richtung zufällig ändert. Um ein solches Verhalten in zwei Dimensionen zu simulieren, betrachten wir ein Teilchen, welches auf einem Quadratgitter der Größe $L \times L$ hüpft. Das Teilchen starte im Mittelpunkt und bewege sich pro Zeitschritt δt zufällig in eine Richtung (oben, unten, links oder rechts), die mithilfe von Zufallszahlen bestimmt wird. Teilchen, die das Gitter verlassen werden nicht berücksichtigt.

(a) Schreiben Sie ein Programm, welches diese Bewegung (Random Walk) für k Zeitschritte δt simuliert.

(b) Visualisieren Sie das Ergebnis aus Aufgabenteil (a) für $k = 1000$ Schritte (z. B. Animation oder statischer Plot mit Trajektorie).

(c) Wiederholen Sie Ihr Experiment ausreichend häufig um den Mittelwert $\left\langle R^2(t) \right\rangle = \left\langle (x(t) - x_0)^2 + (y(t) - y_0)^2 \right\rangle$ bestimmen zu können. (x_0, y_0) ist der Startpunkt des Teilchens. Wie ist der Zusammenhang zwischen $\left\langle R^2(t) \right\rangle$ und t? Kennen Sie dieses Gesetz?

37. ❄**Diffusionsbegrenztes Wachstum (15 Bonuspunkte)**

Wir betrachten wieder ein Quadratgitter, in dem sich in der Mitte ein stationärer Kristallisationskeim befindet. Lassen Sie ein zweites bewegliches Teilchen von einer zufälligen Position des Randes des Quadratgitters starten und einen Random Walk durchführen – dafür eignet sich ein Teil des Programms aus Aufgabe 36. Wenn sich das zweite Teilchen in der direkten Umgebung des Kristallisationskeimes ($\hat{=}$ direkter Nachbar, aber auch Quernachbarn mit Abstand $\sqrt{2}$) befindet, soll es an dem Keim anhaften.
Zufallsschritte, die zum Verlassen des Quadratgitters führen, werden nicht durchgeführt.
Anhaften bedeutet hier, dass das Teilchen seine Bewegung beendet.

(a) Schreiben Sie ein Programm, welches die Bewegung eines Teilchens von zufälligen Randpositionen so häufig wiederholt, bis an dem Kristallisationskeim $N = 500$ Teilchen anhaften (= Schneeflocke, Gittergröße $L = 101$). Randpositionen die von der Schneeflocke bereits mit eingeschlossen werden, werden als Startpunkt ausgeschlossen.

(b) Visualisieren Sie das Ergebnis. Das Ergebnis, welches am ehesten einer Schneeflocke gleicht, wird nach den Feiertagen bestimmt und entsprechend prämiert. Natürlich sind die Parameter nur ein Vorschlag, Sie können die Größe des Gitters L und der Flocke N ändern um ansehnlichere Ergebnisse zu erhalten.

Geben Sie die Programme inkl. Auswertung (Beschriftung, Dokumentation etc.) zusätzlich in elektronischer Form ab (E-Mail: erik.wagner@tu-bs.de).

Schöne Feiertage!