Technische Universität Braunschweig

FDIBA

TU - Sofia

Thema 5: Anleihen und ihre Bewertung

M. Sc. Elisabeth Bondzio

Zinstypen

Zins: (lat. census = Abgabe)

Der Zins bezeichnet das Entgelt, für ein leihweise über einen bestimmten Zeitraum überlassenes Sach- oder Finanzgut (**Geld**), das der Leiher (Schuldner) seinem Leihgeber (Gläubiger) zahlt.

Zinssatz:

Der Zinssatz bezeichnet den relativen Anteil, den der Zins am Wert des überlassenen Guts bei Entleihung hat.

Beispiel: (Standard-Anleihe)

Zehnjährige Staatsanleihe mit einem Nominalwert von 100 Lewa und einem jährlichen Zinssatz von 5 % wird emittiert.

Einzahlungen für den Inhaber der Staatsanleihe:

t = 0	t = 1	t = 2	t = 3	t = 4	t = 5	t = 6	t = 7	t = 8	t = 9	t = 10
-100	5	5	5	5	5	5	5	5	5	105

Zinstypen

Anleihe mit m-maliger Verzinsung

Nominalwert: FV, Nominal-Zinssatz: r,

Zinszahlung: m-mal im Jahr erhält man Zinssatz r/m.

Frage:

Wie lautet der (effektive) Jahreszinssatz?

Antwort:

Endvermögen in einem Jahr: $FV \cdot \left(1+\frac{r}{m}\right)^m$

$$\Rightarrow \text{effektiver Jahreszinssatz} = \left(1+\frac{r}{m}\right)^m - 1$$

Beispiel:

Nominalwert: 10.000 Lewa, Nominal-Zinssatz: 7,75 %, Zinszahlung: monatlich.

$$\Rightarrow \text{effektiver Jahreszinssatz} = \left(1+\frac{0{,}0775}{12}\right)^{12} - 1 = 8{,}031\,\%$$

Zinstypen

Anleihe mit stetiger Verzinsung

Nominalwert: FV, Nominal-Zinssatz: r,

Zinszahlung: kontinuierlich.

Frage:

Wie lautet der (effektive) Jahreszinssatz?

Antwort:

Endvermögen in einem Jahr: $\lim_{m \to \infty} FV \cdot \left(1 + \frac{r}{m}\right)^m = FV \cdot e^r$

$\Rightarrow$ effektiver Jahreszinssatz = $e^r - 1$

Beispiel:

Nominalwert: 10.000 Lewa, Nominal-Zinssatz: 7,75 %, Zinszahlung: stetig.

$\Rightarrow$ effektiver Jahreszinssatz = $e^{0{,}0775} - 1 = 8{,}058\ \%$

Zinsänderungsrisiko

Denkbare Risiken für den Inhaber einer Anleihe:

- Ausfallrisiko des Emittenten (wird durch die Bonität des Emittenten beeinflusst)
- Inflationsrisiko (Investor weiß nicht, was er in 10 Jahren für Rückzahlung kaufen kann)
- Veräußerungsrisiko bei zwischenzeitlichem Verkauf (Angebot und Nachfrage)
  - Markt-Zinssätze bei Verkauf höher als die der Anleihe $\Rightarrow$ Kursabschlag
  - Markt-Zinssätze bei Verkauf geringer als die der Anleihe $\Rightarrow$ Kurszuschlag

$\Rightarrow$ Man spricht vom **Zinsänderungsrisiko** für Anleihen

Allgemein:
(im Weiteren nur für jährliche Zinszahlung und ganzjährige Restlaufzeiten)

Wert einer nicht ausfallbedrohten Anleihe (Bond) B mit festgelegten Kupon-Zahlungen c_t und Nennwert FV:

$$V_B = \frac{c_1}{(1+r)^1} + \ldots + \frac{c_T}{(1+r)^T} + \frac{FV}{(1+r)^T}$$

Dabei bezeichnet r die durchschnittliche Marktrendite, die für die Laufzeit T gewährt bzw. verlangt wird.

Offensichtlich gilt: $r \uparrow \Rightarrow V_B \downarrow$ und $r \downarrow \Rightarrow V_B \uparrow$

Zinsänderungsrisiko

Ferner gilt:

$$i^{(nom)} \begin{Bmatrix} > \\ = \\ < \end{Bmatrix} r \quad \Leftrightarrow \quad \text{B notiert} \begin{Bmatrix} \text{über pari} \\ \text{pari} \\ \text{unter pari} \end{Bmatrix}.$$

Beispiel:

Nominalwert: 5.000 Lewa, Nominal-Zinssatz: 8 %, (Rest-)Laufzeit: 5 Jahre, Zinszahlung: jährlich, durchschnittliche Marktrendite: 10,6842 %.

$$V^{(B)} = \frac{400}{(1{,}106842)^1} + \frac{400}{(1{,}106842)^2} + \frac{400}{(1{,}106842)^3} + \frac{400}{(1{,}106842)^4} + \frac{5.400}{(1{,}106842)^5} = 4.500\ €$$

Effektivrenditen

Falls Marktwert der Anleihe B bekannt ist, kann Rendite ermittelt werden:

$$V^{(B)} = \sum_{t=1}^{T} \frac{c_t}{(1+r)^t} + \frac{FV}{(1+r)^T}$$

r heißt jährliche, durchschnittliche **(Effektiv-)Rendite**
oder auch **„yield to maturity“** der Anleihe

Beispiel:

Nominalwert: 5.000 Lewa, Nominal-Zinssatz: 8 %, (Rest-)Laufzeit: 5 Jahre,
Zinszahlung: jährlich, Marktwert der Anleihe: 4.000 Lewa. (über Excel -> Zielwertsuche)

$$4.000\ € = \frac{400}{(1+r)^1} + \frac{400}{(1+r)^2} + \frac{400}{(1+r)^3} + \frac{400}{(1+r)^4} + \frac{5.400}{(1+r)^5} \Rightarrow r = 13,7973\ \%$$

Arbitragefreiheit

Arbitrage:

Erzielung sicherer Gewinne ohne Kapitaleinsatz

Arbitragefreiheit:

Abwesenheit von Arbitragemöglichkeiten

Gesetz des Einheitspreises:

Zwei äquivalente finanzielle Positionen P und Q (d.h. $\tilde{z}_t^{(P)} \equiv \tilde{z}_t^{(Q)}$ für alle t) müssen bei Arbitragefreiheit den gleichen Preis haben.

Nachweis: Angenommen, es gilt $V^{(P)} > V^{(Q)}$.

$\Rightarrow$ Möglichkeit für einen Besitzer der Position P zu sicheren Gewinnen durch Kauf von Q und zeitgleichen Verkauf von P in Höhe von $V^{(P)} - V^{(Q)} > 0$ in $t = 0$, während in $t = 1, 2, ..., T$ per Saldo jeweils Nullzahlungsreihen (Verzicht auf $\tilde{z}_t^{(P)}$, stattdessen $\tilde{z}_t^{(Q)}$) resultieren.

Zero-Bonds

<u>Damit zweite Möglichkeit der Anleihebewertung auf Basis von Zero-Bonds-Renditen:</u>

<u>Zero-Bond (oder auch Nullkupon-Anleihe):</u>

Anleihe, bei der vor Fälligkeit keine Zinszahlungen erfolgen und bei Fälligkeit die Rückzahlung in Höhe des Nominalwerts vorgenommen wird.

Diese Anleihen werden daher mit Abschlag ausgegeben.

<u>Zahlungsstruktur von Zero-Bonds:</u>

T	0	1	2	3	4
1-jähriger ZB	0	FV			
2-jähriger ZB	0	0	FV		
3-jähriger ZB	0	0	0	FV	
4-jähriger ZB	0	0	0	0	FV

Effektivrenditen von Zero-Bonds

<u>Frage:</u> Wie kann ich eine Zahlungsreihe z_1, …, z_4 mithilfe von Zero-Bonds nachbilden?

- kaufe 1-jährige Zero-Bonds im Umfang z_1/FV_1
- kaufe 2-jährige Zero-Bonds im Umfang z_2/FV_2
- kaufe 3-jährige Zero-Bonds im Umfang z_3/FV_3
- kaufe 4-jährige Zero-Bonds im Umfang z_4/FV_4

<u>Zahlungsstruktur dieses Portfolios aus Zero-Bonds:</u>

t	0	1	2	3	4
z_1/FV_1 „1-jährige ZBs“	0	z_1			
z_2/FV_2 „2-jährige ZBs“	0	0	z_2		
z_3/FV_3 „3-jährige ZBs“	0	0	0	z_3	
z_4/FV_4 „4-jährige ZBs“	0	0	0	0	z_4
Summe	0	z_1	z_2	z_3	z_4

Effektivrenditen von Zero-Bonds

Damit gilt: (gemäß dem Gesetz des Einheitspreises)
Unter Arbitragefreiheit entspricht der Preis der zukünftigen Zahlungen der Anleihe (ohne Berücksichtigung der Anfangsauszahlung) dem Preis des obigen Portfolios aus Zero-Bonds, d.h.:

$z_1/FV_1 \cdot$ Preis $V^{(ZB1)}$ (des 1-jährigen Zero-Bonds)
$+ z_2/FV_2 \cdot$ Preis $V^{(ZB2)}$ (des 2-jährigen Zero-Bonds)
$+ z_3/FV_3 \cdot$ Preis $V^{(ZB3)}$ (des 3-jährigen Zero-Bonds)
$+ z_4/FV_4 \cdot$ Preis $V^{(ZB4)}$ (des 4-jährigen Zero-Bonds)

Zusammengefasst gilt für den Brutto-Wert der Zahlungsreihe:

$$\begin{aligned} V &= \frac{z_1}{FV_1} \cdot V^{(ZB1)} + \frac{z_2}{FV_2} \cdot V^{(ZB2)} + \frac{z_3}{FV_3} \cdot V^{(ZB3)} + \frac{z_4}{FV_4} \cdot V^{(ZB4)} \\ &= z_1 \cdot v^{(ZB1)} + z_2 \cdot v^{(ZB2)} + z_3 \cdot v^{(ZB3)} + z_4 \cdot v^{(ZB4)} \end{aligned}$$

Der **Kurs** $v^{(ZBt)} = V^{(ZBt)}/FV$ heißt daher auch **Zero-Bonds-Abzinsungsfaktor**.

Effektivrenditen von Zero-Bonds

Ferner gelten folgende Renditezusammenhänge:

Effektivrenditen von Zero-Bonds heißen auch **Spot-Rates** und werden im Weiteren mit $r^{(ZBt)}$ bei einer Laufzeit von t Jahren bezeichnet:

$$V^{(ZBt)} = \frac{FV}{(1+r^{(ZBt)})^t} \Leftrightarrow v^{(ZBt)} = \frac{1}{(1+r^{(ZBt)})^t} \Leftrightarrow r^{(ZBt)} = \left(\frac{1}{v^{(ZBt)}}\right)^{\frac{1}{t}} - 1$$

$\Rightarrow$ erste Möglichkeit der Preisermittlung von Zero-Bonds mit Spot-Rates

Die Gegenüberstellung von Laufzeiten und Spot-Rates kann der

Zinsstrukturkurve (oder auch Spot-Rate curve)

entnommen werden. Diese bezeichnet die Gegenüberstellung von Laufzeiten und zugehörigen Spot-Rates von (nicht ausfallgefährdeten) Zero-Bonds.

Zinsstrukturkurve

Tägliche Zinsstruktur am Rentenmarkt – Schätzwerte *)

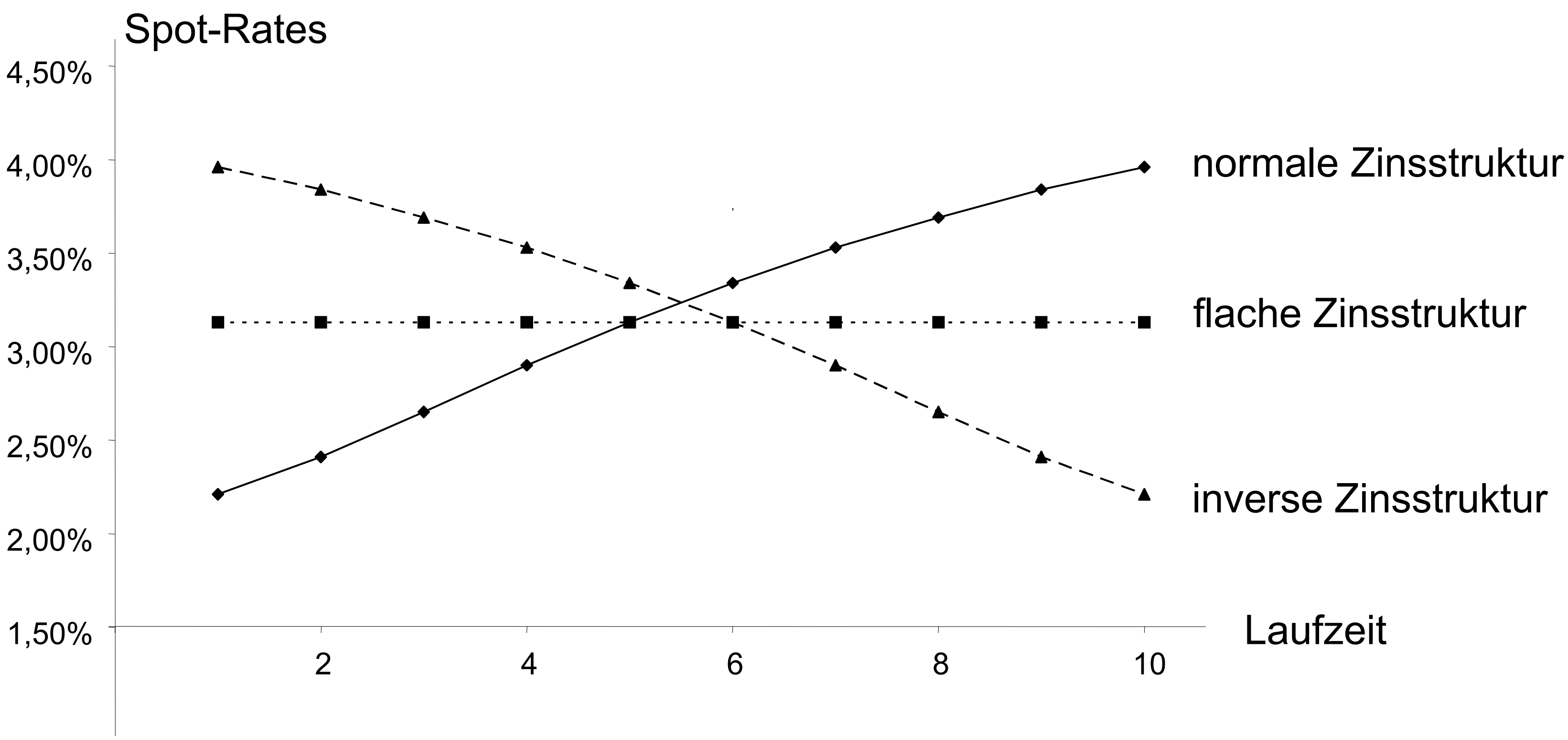
Daily term structure of interest rates in the debt securities market – estimated values *

% p.a.

Stand am Monatsende bzw. Börsentag / *End of month or trading day*	Zinssatz bei Restlaufzeiten von .... Jahren / *Interest rate with residual maturities of ... years* 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Börsennotierte Bundeswertpapiere / *Listed Federal securities*										
2015 Juli	– 0,27	– 0,26	– 0,19	– 0,10	0,03	0,16	0,29	0,43	0,55	0,68
Aug.	– 0,25	– 0,22	– 0,15	– 0,05	0,07	0,20	0,33	0,47	0,59	0,71
Sept.	– 0,27	– 0,26	– 0,20	– 0,11	– 0,01	0,11	0,24	0,36	0,49	0,61
Okt.	– 0,34	– 0,34	– 0,29	– 0,20	– 0,10	0,02	0,15	0,27	0,39	0,51
Nov.	– 0,41	– 0,42	– 0,38	– 0,29	– 0,18	– 0,05	0,08	0,22	0,36	0,49
Dez.	– 0,39	– 0,35	– 0,26	– 0,15	– 0,01	0,13	0,28	0,42	0,56	0,70
2016 Jan.	– 0,46	– 0,48	– 0,44	– 0,36	– 0,26	– 0,15	– 0,03	0,10	0,22	0,34
Febr.	– 0,53	– 0,56	– 0,55	– 0,49	– 0,42	– 0,32	– 0,22	– 0,11	0,00	0,11
März	– 0,50	– 0,52	– 0,49	– 0,43	– 0,36	– 0,27	– 0,17	– 0,07	0,03	0,13
April	– 0,51	– 0,50	– 0,48	– 0,42	– 0,33	– 0,22	– 0,10	0,02	0,14	0,25
Mai	– 0,53	– 0,53	– 0,51	– 0,46	– 0,38	– 0,27	– 0,16	– 0,04	0,07	0,17
Juni	– 0,65	– 0,66	– 0,65	– 0,61	– 0,55	– 0,47	– 0,38	– 0,30	– 0,21	– 0,14
Juli	– 0,61	– 0,64	– 0,64	– 0,61	– 0,54	– 0,47	– 0,39	– 0,30	– 0,22	– 0,15
2016 Juli 18.	– 0,66	– 0,67	– 0,67	– 0,64	– 0,57	– 0,48	– 0,38	– 0,28	– 0,18	– 0,10
19.	– 0,65	– 0,67	– 0,67	– 0,64	– 0,57	– 0,49	– 0,39	– 0,30	– 0,20	– 0,12
20.	– 0,64	– 0,66	– 0,66	– 0,63	– 0,56	– 0,48	– 0,38	– 0,29	– 0,20	– 0,11
21.	– 0,62	– 0,63	– 0,63	– 0,59	– 0,53	– 0,44	– 0,35	– 0,25	– 0,16	– 0,07
22.	– 0,62	– 0,63	– 0,63	– 0,59	– 0,53	– 0,44	– 0,35	– 0,26	– 0,17	– 0,08
25.	– 0,62	– 0,63	– 0,63	– 0,59	– 0,53	– 0,44	– 0,35	– 0,26	– 0,17	– 0,08
26.	– 0,62	– 0,63	– 0,64	– 0,61	– 0,55	– 0,47	– 0,38	– 0,30	– 0,21	– 0,13
27.	– 0,62	– 0,64	– 0,64	– 0,61	– 0,55	– 0,47	– 0,38	– 0,29	– 0,20	– 0,12
28.	– 0,63	– 0,65	– 0,65	– 0,62	– 0,56	– 0,49	– 0,41	– 0,32	– 0,24	– 0,16
29.	– 0,61	– 0,64	– 0,64	– 0,61	– 0,54	– 0,47	– 0,39	– 0,30	– 0,22	– 0,15
Aug. 1.	– 0,62	– 0,65	– 0,66	– 0,63	– 0,57	– 0,50	– 0,42	– 0,34	– 0,26	– 0,19
2.	– 0,61	– 0,63	– 0,64	– 0,61	– 0,55	– 0,47	– 0,39	– 0,30	– 0,22	– 0,15
3.	– 0,60	– 0,63	– 0,63	– 0,60	– 0,53	– 0,45	– 0,37	– 0,28	– 0,20	– 0,12
4.	– 0,60	– 0,62	– 0,63	– 0,60	– 0,54	– 0,46	– 0,37	– 0,28	– 0,20	– 0,12
5.	– 0,61	– 0,64	– 0,65	– 0,63	– 0,57	– 0,50	– 0,41	– 0,32	– 0,24	– 0,16

Zinsstrukturkurve

Beispielhafte Zinsstrukturkurven:



Bewertung mit der Zinsstrukturkurve

Beispiel:

Gegeben: Standard-Anleihe B mit dreijähriger Laufzeit, FV = 100 Lewa, Nominalzinssatz = 5 %.

Ferner: folgendes Portfolio aus ZB1, ZB2 und ZB3 mit FV = 1.

Zeitpunkt	t = 1	t = 2	t = 3
$z^{(B)}$	5	5	105
$z^{(ZB1)}$	1	0	0
$z^{(ZB2)}$	0	1	0
$z^{(ZB3)}$	0	0	1
$5 \cdot z^{(ZB1)} + 5 \cdot z^{(ZB2)} + 105 \cdot z^{(ZB3)}$	5	5	105

$\Rightarrow$ Portfolio und Anleihe sind äquivalent und haben nach dem Gesetz des Einheitspreises bei Arbitragefreiheit gleiche Preise

$$\Rightarrow V^{(B)} = 5 \cdot V^{(ZB1)} + 5 \cdot V^{(ZB2)} + 105 \cdot V^{(ZB3)} = \frac{5}{(1+r^{(ZB1)})^1} + \frac{5}{(1+r^{(ZB2)})^2} + \frac{105}{(1+r^{(ZB3)})^3}$$

Bewertung mit der Zinsstrukturkurve

Allgemein: Marktwert der Anleihe B, falls Zinsstrukturkurve bekannt:

$$V^{(B)} = \sum_{t=1}^{T} \frac{c_t}{(1+r^{(ZBt)})^t} + \frac{FV}{(1+r^{(ZBT)})^T}$$

Beispiel:

Nominalwert: 5.000 Lewa, Nominal-Zinssatz: 8 %, (Rest-)Laufzeit: 5 Jahre, Zinszahlung: jährlich, Zinsstrukturkurve:

Laufzeit	1	2	3	4	5
Spot-Rates (p.a.)	2 %	2,5 %	3 %	3,5 %	4 %

$$V^{(B)} = \frac{400}{(1{,}02)^1} + \frac{400}{(1{,}025)^2} + \frac{400}{(1{,}03)^3} + \frac{400}{(1{,}035)^4} + \frac{5.400}{(1{,}04)^5} = 5.925{,}92\ €$$

Ist die Zinsstrukturkurve bekannt, so ist die Effektivrendite der Anleihe ermittelbar:

$$5.925{,}92\ € = \frac{400}{(1+r)^1} + \frac{400}{(1+r)^2} + \frac{400}{(1+r)^3} + \frac{400}{(1+r)^4} + \frac{5.400}{(1+r)^5} \quad \Rightarrow \quad r = 3{,}8570\ \%$$

Renditekurve

<u>Somit möglich:</u>

Man kann bei gegebener Zinsstrukturkurve für jede Laufzeit die Effektivrendite eines 5 %-Bonds ermitteln und erhält auf diese Weise die sog. **Renditekurve** oder auch **yield curve.**

Analog ist für Anleihen mit anderer Nominal-Verzinsung eine Renditekurve ermittelbar.