



5. Übungsblatt

Abgabe: keine Abgabe

Fragen zu den Aufgaben: Uwe Motschmann, Raum 3.312, Tel.: 391-5186, u.motschmann@tu-bs.de

12. Kovariante Ableitung

- (a) Bestimmen Sie allgemein die kovariante Ableitung eines *kovarianten* Tensors 1. Stufe, d.h. $V_i{}_{|j}$. Gehen Sie aus von

$$V^i{}_{|j} = V^i{}_{|j} + \Gamma^i{}_{jk} V^k \quad . \quad (1)$$

- (b) Beweisen Sie die Produktregel

$$(v_i w_j)_{|k} = v_i{}_{|k} w_j + v_i w_j{}_{|k} \quad (2)$$

- (c) Zeigen Sie, dass die kovariante Ableitung eines *kovarianten* Tensors der 2. Stufe $T_{ij}{}_{|k}$ wie folgt gegeben ist:

$$T_{ij}{}_{|k} = T_{ij}{}_{|k} - T_{lj} \Gamma^l{}_{ik} - T_{il} \Gamma^l{}_{jk} \quad (3)$$

Gehen Sie von den in (a) und (b) bewiesenen Beziehungen aus.

13. Parallelverschiebung

Das kovariante Differential

$$Dv^i = dv^i - \delta v^i = dv^i + \Gamma^i{}_{jk} v^j d\xi^k \quad (4)$$

beschreibt die infinitesimale Änderung der kontravarianten Komponenten des Tensors 1. Stufe v im selben Ereignis P , d.h. die Komponenten im Nachbarpunkt \bar{P} werden in der Basis von P betrachtet. Hierbei ist

$$\delta v^i = -\Gamma^i{}_{jk} v^j d\xi^k \quad (5)$$

die Änderung der v^i bei *Parallelverschiebung* um $d\xi^k$. Der Vektor v wird von $v(\bar{P})$ um „ $d\xi$ “ nach $v(P)$ 'zurückverschoben'.

- (a) Wir betrachten ebene Polarkoordinaten (ρ, φ) und die Punkte $P = (\rho_0, 0)$, $Q = (\rho_0, \pi/2)$, $R_1 = (\epsilon, \pi/2)$ und $R_2 = (\epsilon, 0)$. (x, y) sind kartesische Koordinaten.

- i. Drücken Sie den Tensor 1. Stufe $v = e_x$ in der kovarianten Basis der Polarkoordinaten aus.
- ii. Berechnen Sie explizit

$$\int_P^Q dv^\rho, \int_P^Q dv^\varphi, \int_P^Q \delta v^\rho, \text{ und } \int_P^Q \delta v^\varphi$$

bei Parallelverschiebung des Tensors 1. Stufe v von P nach Q .

Bitte wenden →

iii. Bestimmen Sie außerdem

$$\oint \delta v^\rho \text{ und } \oint \delta v^\varphi$$

für den Weg $P \rightarrow Q \rightarrow R_1 \rightarrow R_2 \rightarrow P$.

iv. Interpretieren Sie ihr Ergebnis.

- (b) Betrachten wir nun die Parallelverschiebung auf einer Kugeloberfläche (ϑ, φ) für den Vektor $\underline{v} = -\underline{e}_\vartheta$ und den Weg $(\pi/2, 0) \rightarrow (\pi/2, \pi/2) \rightarrow (\epsilon, \pi/2) \rightarrow (\epsilon, 0) \rightarrow (\pi/2, 0)$. Berechnen Sie analog

$$\oint \delta v^\vartheta \text{ und } \oint \delta v^\varphi$$

entlang des angegebenen Weges und interpretieren Sie das Ergebnis.

- (c) Berechnen Sie nun die Parallelverschiebung allgemein beim Umlauf um ein infinitesimales Parallelogramm aufgespannt durch (ϑ_0, φ_0) , $(\vartheta_0, \varphi_0 + d\varphi)$, $(\vartheta_0 + d\vartheta, \varphi_0)$ und $(\vartheta_0 + d\vartheta, \varphi_0 + d\varphi)$. Als Ergebnis sollten Sie erhalten

$$\sum \delta v^i \approx \pm v^k d\vartheta d\varphi R_{k\vartheta\varphi}^i \quad , \quad (6)$$

wobei \pm vom Umlaufsinn abhängt und der *Krümmungstensor* R_{kmn}^i gegeben ist durch

$$R_{jkl}^i = \Gamma_{jk|l}^i - \Gamma_{jl|k}^i + \Gamma_{jk}^m \Gamma_{ml}^i - \Gamma_{jl}^m \Gamma_{mk}^i \quad . \quad (7)$$