

4. Übungsblatt

Abgabe: Di, 19.11.2019 bis 11:30 Uhr, Kasten neben A316

Übungsblätter gibt es unter <https://www.tu-bs.de/theophys/edu/wise-1920/thermo1920>.

13. Wissensfragen (3 Punkte)

Bitte benennen Sie alle verwendeten Symbole und Größen.

- (a) Was ist ein Dichteoperator?
- (b) Was ist ein mikrokanonisches Ensemble?

14. Dichteoperatoren von Spin- $\frac{1}{2}$ Teilchen (15 Punkte)

Für die Komponenten S^α mit $\alpha \in \{x, y, z\}$ des **Spinoperators** $\vec{S}$ eines quantenmechanischen Spin- $\frac{1}{2}$ Teilchens gilt $[S^\alpha, S^\beta] = i\hbar \epsilon_{\alpha\beta\gamma} S^\gamma$ und $\vec{S}^2 = \sum_\alpha S^\alpha S^\alpha = \frac{3}{4}\hbar^2$.

- (a) Zeigen Sie, dass für die S^α gilt: $\text{Sp } S^\alpha = 0$.
- (b)
 - i. Welche Bedingung muss ein **Dichteoperator** für ein Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen erfüllen?
 - ii. Beweisen Sie, dass

$$\rho = \frac{1}{2}(\mathbb{1} + \vec{u} \cdot \vec{\sigma})$$

mit $\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ einem Vektor mit den drei Paulimatrizen als Komponenten und $\vec{u}$ einem reellen Parametervektor, die von Ihnen aufgestellten Bedingungen erfüllt. Nehmen Sie an, dass $\rho \geq 0$ für geeignete Werte von $\vec{u}$ erfüllt ist.

- (c) Zeigen Sie, dass $\vec{u}$ identisch ist mit dem Mittelwert $\langle \vec{\sigma} \rangle = \text{Sp}(\rho \vec{\sigma})$.
- (d) Der Dichteoperator habe die Eigenwerte ρ_1 und ρ_2 . Drücken Sie $\text{Sp } \rho$ und $\text{Sp } \rho^2$ durch ρ_1 und ρ_2 aus.
- (e) Begründen Sie, dass $u := |\vec{u}| \leq 1$ sein muss.
Welche Eigenschaft von $\vec{u}$ charakterisiert einen **reinen Zustand**?
Hinweis: Betrachten Sie zunächst $(\vec{u} \cdot \vec{\sigma})^2$ und vereinfachen Sie damit ρ^2 . Nutzen Sie dann Ihre Ergebnisse aus (d), um die Eigenwerte in Abhängigkeit von u auszudrücken.
- (f) Nun betrachte man N Teilchen in einem Neutronenstrahl. Die Hälfte der Teilchen sei in Richtung der positiven x -Achse, die andere Hälfte in Richtung der negativen y -Achse ausgerichtet.
 - i. Geben Sie den Dichteoperator an.
 - ii. Wie sieht der Dichteoperator aus, wenn man über die Spins der zweiten Hälfte gar nichts weiß?

Bitte wenden! →

15. Eigenstate Thermalization Hypothesis (ETH) (12 Punkte)

Ein quantenmechanisches System sei aus 'typischer' kondensierter Materie zusammengesetzt und werde durch einen Hamiltonoperator $H = \sum_{\alpha} E_{\alpha} |E_{\alpha}\rangle \langle E_{\alpha}|$ mit Eigenzuständen $|E_{\alpha}\rangle$ zu Eigenenergien E_{α} beschrieben.

- (a) Eine Studierende bringt das System am Anfang ihrer Bachelorarbeit ganz vorsichtig, z.B. in den ersten 5 Tagen (wie auch immer), in einen Zustand $|\Psi(t=0)\rangle$.

Schätzen Sie grob ab, aus wie vielen Eigenzuständen der Zustand $|\Psi(t=0)\rangle$ typischerweise superponiert ist.

Hinweis: Erinnern Sie sich an die Unschärferelation.

Nutzen Sie ihre Ergebnisse aus Aufgabe 12, um die Zustandsdichte abzuschätzen.

- (b) Über welche Zeitspanne müsste die Studierende den Zustand präparieren, damit es ein einzelner Energieeigenzustand werden kann?

Eine Form der sog. „Eigenstate Thermalization Hypothesis“ (ETH) besagt, dass sich der **quantenmechanische Erwartungswert** $\langle \hat{A} \rangle(t) = \langle \Psi(t) | \hat{A} | \Psi(t) \rangle$ einer 'typischen' Observablen $\hat{A}$ in einem 'typischen' Zustand $|\Psi(t=0)\rangle$ mit Energieunschärfe ΔE im Limes langer Zeiten so verhält wie der **thermodynamische statistische Mittelwert** in einem mit demselben Energieintervall ΔE gleichverteilten Ensemble ρ (mikrokanonisches Ensemble) - wenn die Diagonalmatrixelemente $\langle E_{\alpha} | \hat{A} | E_{\alpha} \rangle$ hinreichend schwach variierende Funktionen der Energie E_{α} sind.

- (c) Zeigen Sie nun, dass für ein System, das in einem Zustand Ψ zur Zeit $t = 0$

$$|\Psi(t=0)\rangle = \sum_{\alpha} c_{\alpha} |E_{\alpha}\rangle \quad (1)$$

präpariert wird, der **Langzeitlimes des quantenmechanischen Erwartungswerts** $\bar{A}$ einer Observablen $\hat{A}$, definiert als

$$\bar{A} \equiv \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} \langle \Psi(t) | \hat{A} | \Psi(t) \rangle dt, \quad (2)$$

durch

$$\bar{A} = \sum_{\alpha} |c_{\alpha}|^2 A_{\alpha\alpha} \quad (3)$$

gegeben ist. Dabei sind die $A_{\alpha\alpha} = \langle E_{\alpha} | \hat{A} | E_{\alpha} \rangle$, die Zustände $|E_{\alpha}\rangle$ Eigenzustände des Hamilton-Operators zur Energie E_{α} und $c_{\alpha} \in \mathbb{C}$.

Hinweis: Überlegen Sie sich, wie $|\Psi(t)\rangle$ mit $|\Psi(t=0)\rangle$ zusammenhängt.

- (d) Der **Mittelwert im mikrokanonischen Ensemble** der Observablen $\hat{A}$ ist gegeben durch

$$\langle A \rangle_{\text{mikro}} \equiv \frac{1}{\mathcal{N}} \sum_{\alpha'=1}^{\mathcal{N}} A_{\alpha'\alpha'}, \quad (4)$$

wobei die Summe über alle Zustände $|E_{\alpha'}\rangle$ in einem kleinen Energieintervall ΔE um E mit insgesamt $\mathcal{N}$ Zuständen läuft.

Zeigen Sie, dass unter den Annahmen der ETH gilt:

$$\bar{A} \approx \langle A \rangle_{\text{mikro}} \quad (5)$$