Technische Universität Braunschweig

INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

Prof. Dr. Wolfram Brenig
Erik Wagner

3. Übungsblatt

Abgabe: Di, 12.11.2019 bis 11:30 Uhr, Kasten neben A316

Übungsblätter gibt es unter `https://www.tu-bs.de/theophys/edu/wise-1920/thermo1920`.

10. **Wissensfragen (5 Punkte)**

Bitte benennen Sie alle verwendeten Symbole und Größen.

(a) Betrachten Sie $\rho(x_1, x_2, p_1, p_2) = \frac{1}{2a}\Theta(a - |x_1|)\,\delta(x_2)\,\delta(p_1)\,\frac{1}{2b}\Theta(b - |p_1|)$ mit $x_{1,2}, p_{1,2} \in \mathbb{R}$, $a, b > 0$, $\Theta(x)$ der Heaviside-Funktion und $\delta(x)$ der Delta-Funktion. Ist ρ eine klassische Verteilungsfunktion?

(b) Betrachten Sie ein quantenmechanisches System mit drei Zuständen $|1\rangle$, $|2\rangle$ und $|3\rangle$. Ist ρ mit $\langle 1|\,\rho\,|1\rangle = 1/2$, $\langle 2|\,\rho\,|2\rangle = 1/3$, $\langle 3|\,\rho\,|3\rangle = 1/4$ und $\langle a|\,\rho\,|b\rangle = 0\;\forall a \neq b$ ein statistischer Operator?

(c) Was ist eine Zustandssumme?

11. **Eigenschaften der Spur (5 Punkte)**

(a) Zeigen Sie, dass für die Spur von zwei Matrizen A, B gilt:

$$\mathrm{Sp}(A\,B) = \mathrm{Sp}(B\,A)$$

(b) Zeigen Sie nun, dass für die Spur von drei Matrizen A, B, C gilt:

$$\mathrm{Sp}(A\,B\,C) = \mathrm{Sp}(C\,A\,B) = \mathrm{Sp}(B\,C\,A)$$

d. h. die Spur ist invariant unter zyklischer Vertauschung.

(c) Zeigen Sie, dass die Spur basisunabhängig ist.

12. **Zustandssumme und Zustandsdichte des idealen Gases (20 Punkte)**

Wir betrachten die thermodynamischen Eigenschaften des idealen Gases. Dazu werden N wechselwirkungsfreie, ununterscheidbare Teilchen in einen Würfel der Kantenlänge L gesperrt. Zur Beschreibung des Würfels kann man sich ein Potential vorstellen, welches innerhalb des Würfels 0 und ausserhalb unendlich ist.
Berechnen Sie die **Zustandssumme** Z, **Zustandsdichte** $\Omega(E)$ und die **Zahl der Zustände** $g(E)$ bis zur Energie E. Gehen Sie dabei wie folgt vor:

(a) Die N Teilchen und die dazugehörigen Phasenraumkoordinaten sind voneinander unabhängig (vgl. Annahmen) – es kann deshalb zunächst der Hamiltonoperator für ein Teilchen in einer Dimension betrachtet werden.
Geben Sie die Lösung der Wellenfunktion und der Energie an.

Bitte wenden! →

(b) Berechnen Sie nun die Zustandssumme für N Teilchen in drei Dimensionen.
Geben Sie das Ergbnis in Abhängigkeit der Teilchenzahl N, des Volumens $V = L^3$ und der thermischen Wellenlönge $\lambda = \sqrt{\frac{2\pi\hbar}{mk_BT}}$ an.
Hinweis: Es treten in der Aufgabe Gauß-Integrale $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x$ auf. Diese können Sie nachschlagen oder für 2 Bonuspunkte selbst berechnen.

(c) Um die Anzahl der Zustände bis zur Energie E zu bestimmen, braucht man das Volumen einer $3N$-dimensionalen Kugel.
Berechnen Sie dieses mit Hilfe folgendener Schritte:

i. Schreiben Sie ein Volumenintegral in kartesischen Koordinaten über den Integranden 1 für eine Kugel mit Radius R in N Dimensionen auf.
Dies ist das Volumen V_N einer N-dimensionalen Kugel.

ii. Bringen Sie mithilfe einer Substitution das Volumenintegral aus (i) in die Form $V_N = R^N \cdot f(N)$.
Hinweis: Bringen Sie mit Hilfe der Substitutionen die Integrationsgrenzen der Integrale sukzessiv auf die Grenzen -1 bis $+1$.

iii. Berechnen Sie anschließend folgenden Ausdruck:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x_1\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x_2 ... \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x_N\, e^{-(x_1^2+x_2^2+...+x_N^2)}$$

Wovon hängt der Integrand ab?
Sie können demnach die Integration über Kugelschalen ausführen, d.h.:

$$\mathrm{d}V = \mathrm{d}x_1 ... \mathrm{d}x_N \to \mathrm{d}(\text{Kugelschale})\,\mathrm{d}R$$

Überlegen Sie sich dazu, wie sich das Integral über die Kugelschale aus ihrem Ergebnis aus (ii) ableiten lässt.
Sie können die Überlegung mit dem Ihnen bekannten Fall aus dem $\mathbb{R}^3$ überprüfen.

iv. Eine Vereinfachung der auftretenden Integrale kann mit Hilfe der Γ-Funktion erreicht werden:

$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty}\mathrm{d}x\, x^{n-1}e^{-x}$$

Nutzen Sie dies, um einen Ausdruck für $f(N)$ aus (ii) zu erhalten.

v. Überprüfen Sie das Ergebnis für das Volumen V_3 einer Kugel im $\mathbb{R}^3$ mithilfe der Rekursionsformel für $\Gamma(n)$:

$$\Gamma(n+1) = n\,\Gamma(n); \qquad \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$$

(d) Mithilfe des in Aufgabenteil (c) bestimmten Volumens einer N-dimensionalen Kugel können Sie das Phasenraumvolumen von $3N$ Variablen zu einer Energie E bestimmen. Es fehlt nur noch die obere Integrationsgrenze, also der Radius der $3N$-dimensionalen Kugel dem die Energie E entsprechen muss.
Berechnen Sie damit die Zahl der Zustände $g(E)$.

(e) Um letztlich die Zustandsdichte $\Omega(E)$ zu bestimmen, überlegen Sie sich, was die Zustandsdichte ist und wie sie mit $g(E)$ in Beziehung steht.