



2. Übungsblatt

Abgabe: Di, 05.11.2019 bis 11:30 Uhr, Kasten neben A316

Übungsblätter gibt es unter <https://www.tu-bs.de/theophys/edu/wise-1920/thermo1920>.

7. **Wissensfragen (3 Punkte)**

Bitte benennen Sie alle verwendeten Symbole und Größen.

- (a) Was legt den Mikrozustand und was den Makrozustand fest?
- (b) Was ist ein Ensemble?
- (c) Warum ist das Zeitmittel nicht bedingungslos gleichzusetzen mit dem Scharmittel?

8. **Das Gesetz der großen Zahlen (8 Punkte)**

Eine Zufallsvariable X unterliege einer Wahrscheinlichkeitsverteilung $w(x)$ mit dem Erwartungswert:

$$\langle x \rangle := \int_{-\infty}^{\infty} x w(x) dx < \infty$$

und der Varianz:

$$(\Delta x)^2 := \int_{-\infty}^{\infty} (x - \langle x \rangle)^2 w(x) dx < \infty.$$

Aus N gleichartigen Zufallsvariablen X_1, X_2, \dots, X_N bilden wir $Y = \frac{1}{N}(X_1 + X_2 + \dots + X_N)$ als neue Zufallsvariable.

Ausgangspunkt ist die Wahrscheinlichkeit $\prod_{n=1}^N w(x_n) dx_n$ dafür, dass X_1 im Intervall $(x_1, x_1 + dx_1)$, X_2 im Intervall $(x_2, x_2 + dx_2)$ usw. liegt.

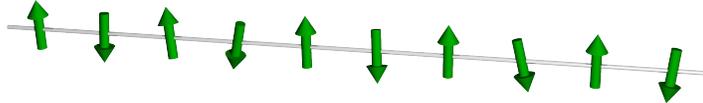
- (a) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von Y .
- (b) Interpretiert man X als mögliche Messwerte, so beschreibt N die Anzahl gleichartiger Messungen. Wie oft muss man messen, um (zufällige) Messfehler auf ein Zehntel des Fehlers einer Messung zu reduzieren?
- (c) In der statistischen Physik betrachtet man typischerweise 10^{23} Teilchen pro cm^3 . Wie groß sind dann die Schwankungen?

Bitte wenden! →

9. **Motivation zur statistischen Betrachtung: Spin-Modelle (9 Punkte)**

Man betrachte als Modellsystem eine lineare Kette (eindimensionales Gitter) von N Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen (N gerade). Das System wird durch einen Hamiltonoperator $H(\vec{S}_1, \dots, \vec{S}_N)$ beschrieben, wobei die \vec{S}_i die Spinoperatoren am i -ten Platz sind, für deren Komponenten die üblichen Spin-Vertauschungsrelationen gelten. Ein typischer Modell-Hamiltonoperator für eine Spinkette mit periodischen Randbedingungen ($\vec{S}_{N+1} \equiv \vec{S}_1$) ist von der Form

$$H = \sum_{i=1}^N \vec{S}_i \cdot \vec{S}_{i+1}.$$



- (a) Geben Sie die Vertauschungsrelationen für die Komponenten (x , z und y) eines Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchens an.
Wie sieht der Hilbertraum eines einzelnen Spin- $\frac{1}{2}$ aus?
- (b) Wie sieht der Zustandsraum der gesamten Kette aus?
Welche Dimension hat dieser Zustandsraum?
- (c) Wieviele Elemente hat eine Matrixdarstellung des Hamiltonoperators in einer Basis des Hilbertraums?
Wieviele Byte Speicherplatz sind für eine Kette mit $N = 20$ nötig, wenn die Matrixdarstellung reell ist? Zur Speicherung einer reellen Zahl als *double* benötigt man auf einem Computer 8 Byte.
- (d) Zeigen Sie, dass für den gegebenen Hamiltonoperator der Gesamtspin $S^z = \sum_{i=1}^N S_i^z$ eine Erhaltungsgröße ist, d. h. $[H, S^z] = 0$.
- (e) Sei P_{S^z} die Wahrscheinlichkeit für einen Zustand mit Gesamtspin S^z . Zeigen Sie, dass gilt:

$$\sum_{S^z=-N/2}^{N/2} P_{S^z} = 1.$$

Nehmen Sie dafür an, dass die Wahrscheinlichkeit für einen einzelnen Spin nach oben oder nach unten zu zeigen, gleich $\frac{1}{2}$ ist.