



1. Übungsblatt

Abgabe: Di, 29.10.2019 bis 11:30 Uhr, Kasten neben A316

Übungsblätter gibt es unter <https://www.tu-bs.de/theophys/edu/wise-1920/thermo1920>.

4. **Wissensfragen (2 Punkte)**

Bitte benennen Sie alle verwendeten Symbole und Größen.

- (a) Was ist eine Zufallsvariable?
- (b) Wie lautet das Gesetz der großen Zahlen?

5. **Motivation zur statistischen Betrachtung: Flugbahn (7 Punkte)**

Betrachtet wird die Bewegung eines klassischen Teilchens in einem verdünnten Gas. Die Bahn möge als Gerade zwischen zwei Stößen idealisiert werden, so dass man nur die Orte und Zeiten der Stöße speichern muss. Zur Bestimmung der mittleren Stoßzeit benutze man die Zahlenwerte: Dichte $n = 10^{19} \text{ cm}^{-3}$, Wirkungsquerschnitt $\sigma = 10^{-16} \text{ cm}^2$ und mittlere Geschwindigkeit $v = 10^5 \text{ cm/s}$. Zur Speicherung einer reellen Zahl als *double* benötigt man auf einem Computer 8 Byte.

- (a) Über welche Zeitspanne kann die Bahn auf einer 100 GB großen Festplatte dokumentiert werden?
- (b) Wenn man sich auf vierstellige Zahlenangaben beschränkt und eine Sekunde der Bahn des Teilchens auf Papier mitprotokollieren möchte (mit etwa 5000 Zeichen pro Seite): Wieviel Blatt Papier sind dazu nötig?
Wie lange dauert der Vorgang wenn ein Drucker die Seiten mit etwa 10 Seiten/Minute auswirft?
Berechnen Sie das Gesamtgewicht des dazu benötigten Papiers (6 g/Blatt).
- (c) Wiederholen Sie die Aufgabenteile (a) und (b) für alle Teilchen in einem 0.3ℓ-Glas. Zum Vergleich: Das Gewicht der Erde ist $5.9 \times 10^{24} \text{ kg}$.

Bitte wenden! →

6. Poisson-Verteilung und Grenzwertsatz (11 Punkte)

Eine weitere bekannte diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilung ist die **Poisson-Verteilung**

$$P(\lambda, x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}. \quad (1)$$

mit $\lambda > 0$ und $x \in \mathbb{N}$.

- (a) Berechnen Sie den Mittelwert $\langle X \rangle$ und die Varianz $(\Delta X)^2$ der Poisson-Verteilung.
- (b) Zeigen Sie, dass für $n \rightarrow \infty$ und $p \rightarrow 0$ mit $\lambda = np = \text{const.}$ die Binomial-Verteilung $B(x, n, p)$ in die Poisson-Verteilung $P(\lambda, x)$ übergeht.
- (c) Nach dem **Grenzwertsatz** konvergieren alle diskreten Wahrscheinlichkeitsverteilungen für $n \rightarrow \infty$ gegen die **Normal-Verteilung**

$$N(x, \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)} \quad (2)$$

mit Mittelwert μ und Varianz σ^2 .

Zeigen Sie dies für die Binomial-Verteilung indem Sie zuerst die Näherung

$$\binom{n}{x} p^x q^{n-x} \approx \sqrt{\frac{n}{2\pi x(n-x)}} \exp\left(-n h\left(\frac{x}{n}\right)\right) \quad (3)$$

mit $h(t) := t \ln\left(\frac{t}{p}\right) + (1-t) \ln\left(\frac{1-t}{q}\right)$ und $q = 1 - p$

durch Ausnutzung der **Stirlingschen Formel** $n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} (1 + \dots)$ herleiten und dann die Funktion $h(t)$ bis zur zweiten Ordnung um p herum entwickeln.

Für welche Werte von x ist diese Näherung gut?