



4. Übungsblatt

Abgabe: keine Abgabe

**Fragen zu den Aufgaben:** Uwe Motschmann, Raum 3.312, Tel.: 391-5186, u.motschmann@tu-bs.de

9. Volumenelement

Das Volumenelement  $d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3$  im  $\mathbb{R}^3$  ist ein Skalar, jedoch i.a. kein Tensor 0. Stufe. Zu einem Tensor wird es durch

$$dV = \sqrt{g} d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3$$

mit der Determinante des metrischen Tensors  $g = \det(g_{ab})$ .

Zeigen Sie, dass  $dV$  in die bekannten Formeln übergeht für

- (a) Kartesische Koordinaten  $\xi^1 = x^1, \xi^2 = x^2, \xi^3 = x^3$
- (b) Zylinderkoordinaten  $\xi^1 = \rho, \xi^2 = \varphi, \xi^3 = z$
- (c) Kugelkoordinaten  $\xi^1 = r, \xi^2 = \vartheta, \xi^3 = \varphi$
- (d) Beweisen Sie nun, dass ein Tensor 0. Stufe vorliegt, also

$$dV = \sqrt{g} d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3 = \sqrt{g'} d\xi^{1'} d\xi^{2'} d\xi^{3'} = dV'$$

gilt für beliebige Koordinaten.

Anleitung: Skript Rechenmethoden

10. Christoffel-Symbole und metrischer Tensor

- (a) Zeigen Sie, dass der metrische Tensor  $g_{ij}$  die Bedingung  $g_{ij|k} = 0$  erfüllt. Formulieren Sie die drei Gleichungen

$$g_{ij|k} = 0 \tag{1}$$

$$g_{ik|j} = 0 \tag{2}$$

$$g_{jk|i} = 0 \tag{3}$$

mit den Christoffel-Symbolen.

- (b) Kombinieren Sie die Gl. (1)-(3) und zeigen Sie damit:

$$\Gamma_{jk}^l = \frac{1}{2} g^{il} (g_{ij|k} + g_{ik|j} - g_{jk|i}) \tag{4}$$

Berechnen Sie mit dieser Formel die Christoffelsymbole für

- (c) Kartesische Koordinaten im  $\mathbb{R}^3$ :  $\xi^1 = x^1, \xi^2 = x^2, \xi^3 = x^3$

Bitte wenden →

- (d) Zylinderkoordinaten im  $\mathbb{R}^3$  :  $\xi^1 = \rho, \xi^2 = \varphi, \xi^3 = z$
- (e) den 2d Einheitszylinder  $\rho = 1$  :  $\xi^1 = \varphi, \xi^2 = z$
- (f) Kugelkoordinaten im  $\mathbb{R}^3$  :  $\xi^1 = r, \xi^2 = \vartheta, \xi^3 = \varphi$
- (g) die S2-Sphäre (Oberfläche der Einheitskugel  $r = 1$ ):  $\xi^1 = \vartheta, \xi^2 = \varphi$

Anleitung: Beschaffen Sie sich die jeweiligen metrischen Tensoren, z.B. aus Aufgabe 2a.

### 11. Metrischer Tensor der 3d-Hyperkugel

Berechnen Sie das Linienelement  $ds^2$  auf der 3d-Hyperkugel mit Radius  $r = R$  im Euklidischen 4d-Raum (definiert als alle Punkte mit Abstand  $R$  zum Ursprung) in generalisierten sphärischen Koordinaten:

$$x^1 = r \sin \alpha \sin \vartheta \sin \phi$$

$$x^2 = r \sin \alpha \sin \vartheta \cos \phi$$

$$x^3 = r \sin \alpha \cos \vartheta$$

$$x^4 = r \cos \alpha$$

mit  $\alpha, \vartheta \in \{0, \pi\}$ ,  $\phi \in \{0, 2\pi\}$ .