Versuch 13: Phasenbeziehung im Wechselstromkreis

Mit Hilfe eines Zweistrahloszilloskops soll die Phasenbeziehung von Strom und Spannung bei Wechselstromwiderständen sichtbar gemacht und in Abhängigkeit von der Frequenz bestimmt werden. Dazu werden Serienschaltungen aus ohmschem Widerstand, Induktivität und Kapazität aufgebaut.

Vorkenntnisse

Wechselstrom, Wechselspannung – Kirchhoffsche Regeln – Schaltkreise mit ohmschem Widerstand, Kapazität und Induktivität (RC-, RL- und RLC-Kreis) – Phasenverschiebung in Schaltungen mit C und L – Berechnung der Schaltkreise – RLC-Kreis und dessen Resonanz – Anwendungen des RLC-Kreises – Messung von Wechselstrom und Wechselspannung – Spitzenwert, Effektivwert, Mittelwert – Leistungsmessung – Blindleistung und Wirkleistung – Darstellung von Wechselstromwiderständen in der Gaußschen Zahlenebene (Zeigerdiagramm) – Funktionsweise eines Oszilloskops

Literatur

W. Demtröder – Experimentalphysik 2: Elektrizität und Optik
. . .

Physikalische Grundlagen

Wechselströme

Ein Wechselstrom ist ein elektrischer Strom, dessen Stromstärke eine periodische Funktion der Zeit ist. Ist diese Funktion harmonisch, dann kann dieser bei geeigneter Wahl des Zeitpunkts $t = 0$ beschrieben werden durch eine Gleichung der Form

$$I = I_0 \cos(\omega t) \tag{1}$$

I_0 ist die Amplitude oder der Scheitelwert des Wechselstroms, ω seine Kreisfrequenz. Die Dauer einer Periode ist gegeben durch $T = 2\pi/\omega$, die Frequenz durch $f = 1/T = \omega/2\pi$. Der Wechselstrom wird hervorgerufen durch eine Wechselspannung U gleicher Frequenz

$$U = U_0 \cos(\omega t + \varphi) \tag{2}$$

Offensichtlich kann das Ohmsche Gesetz der Proportionalität von U und I

$$U = RI \tag{3}$$

mit R als reellem Proportionalitätsfaktor bei Wechselströmen nur dann gelten, wenn Strom und Spannung phasengleich oszillieren ($\varphi = 0$ in Gl. (2)). Dieses ist im Allgemeinen jedoch nicht der Fall. Will man die Form von Gl. (3) auch bei Wechselströmen im Allgemeinen verwenden, so muss man die reelle Zahl R durch eine Größe ersetzen, in der sowohl die Informationen über den Betrag U_0/I_0 als auch über die Phasendifferenz φ zwischen Spannung und Strom enthalten ist. Dies leistet die Einführung des komplexen Widerstandes $\tilde{Z}$, auch Impedanz genannt. In folgenden Beschreibungen sind komplexe Größen im Unterschied zu reellen Größen mit einer Tilde gekennzeichnet, also $\tilde{U}$, $\tilde{I}$, $\tilde{Z}$ ....

Impedanzen in einer RLC-Serienschaltung

Abb. 1 zeigt die Reihenschaltung einer idealen Spule mit der Selbstinduktivität L, eines idealen ohmschen Widerstands R und eines idealen Kondensators der Kapazität C. Den durch diesen Kreis fließenden Wechselstrom $I = I_0 \cos(\omega t)$ veranschaulichen wir durch einen mit der Winkelgeschwindigkeit ω in der Gaußschen Zahlenebene rotierenden Phasenzeiger der Länge I_0 mit

$$\tilde{I} = I_0(\cos(\omega t) + i \sin(\omega t)) = I_0 e^{i\omega t}. \tag{4}$$

Die Spannung $\tilde{U}$ läuft um den Winkel φ phasenverschoben gegenüber dem Strom $\tilde{I}$ und es ist

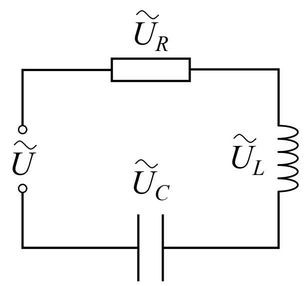

Abb. 1: RLC-Serienkreis.

$$\tilde{U} = U_0 e^{i(\omega t + \varphi)}. \tag{5}$$

Der Vorteil der komplexen Schreibweise gegenüber der Benutzung von sin- und cos-Termen besteht darin, dass sich der Phasenwinkel φ durch Einführung einer komplexen Amplitude $\tilde{U}_0 = U_0 e^{i\varphi}$ aus dem Argument der Exponentialfunktion herausziehen lässt mit

$$\tilde{U} = \tilde{U}_0 e^{i\omega t}. \tag{6}$$

Um die Phasenverschiebung φ in einer RLC-Serienschaltung zu bestimmen, wendet man die Kirchhoffsche Maschenregel an, wonach

$$\tilde{U} = \tilde{U}_L + \tilde{U}_R + \tilde{U}_C \tag{7}$$

ist. An einer idealen Spule (d.h. einer Spule mit verschwindendem Gleichstromwiderstand) fällt allein die durch die zeitliche Stromänderung eine induzierte Spannung ab

$$\tilde{U}_L = L\frac{d\tilde{I}}{dt} = L\frac{d}{dt}(I_0 e^{i\omega t}) = Li\omega I_0 e^{i\omega t} = i\omega L\tilde{I}. \tag{8}$$

Für die Spannung an einem idealen Kondensator (d.h. einem Kondensator mit unendlich hohem Gleichstromwiderstand) gilt mit $\tilde{Q}$ als ebenfalls seine Phasenverschiebung zum Strom enthaltende komplexe Ladung

$$\tilde{U}_C = \frac{\tilde{Q}}{C} = \frac{1}{C}\int \tilde{I} dt = \frac{1}{C}\int I_0 e^{i\omega t} dt = \frac{1}{C}\frac{1}{i\omega} I_0 e^{i\omega t} = \frac{1}{i\omega C}\tilde{I}. \tag{9}$$

Am ohmschen Widerstand R sind Strom und Spannung phasengleich

$$\tilde{U}_R = R\tilde{I} \tag{10}$$

Einsetzen der Gl. (8) bis (10) in Gl. (7) ergibt

$$\tilde{U} = (i\omega L + \frac{1}{i\omega C} + R)\tilde{I} = \tilde{Z}\tilde{I} \tag{11}$$

mit der komplexen Impedanz

$$\tilde{Z} = i\omega L + \frac{1}{i\omega C} + R = R + i(\omega L - \frac{1}{\omega C}). \tag{12}$$

Der Betrag der Impedanz ergibt das Verhältnis der (reellen) Amplituden U_0/I_0

$$\frac{U_0}{I_0} = |\tilde{Z}| = \sqrt{\mathfrak{Re}^2(\tilde{Z}) + \mathfrak{Im}^2(\tilde{Z})} = \sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2} \tag{13}$$

Der Betrag der Impedanz durchläuft ein Minimum für $\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0$ oder $\omega = (LC)^{-1/2}$, der sogenannten Resonanzfrequenz des *RLC*-Serienkreises. Dieser Zusammenhang lässt sich insbesondere als Darstellung in der Gaußschen Zahlenebene verdeutlichen (s. Abb. 2, hier für eine Reihenschaltung aus Kapazität, Induktivität und ohmschem Widerstand): Auf der Achse des Realteils wird der ohmsche Widerstand aufgetragen, welcher reell ist, auf der Achse des Imaginärteils die Differenz $\omega L - \frac{1}{\omega C}$, welche den komlexen Widerstand der Schaltung darstellt. Die Phasendifferenz φ ist dann der Winkel Achse des Realteils in der Gaußschen Zahlenebene mit

$$\tan(\varphi) = \frac{\mathfrak{Im}(\tilde{Z})}{\mathfrak{Re}(\tilde{Z})} = \frac{\omega L - 1/\omega C}{R} \tag{14}$$

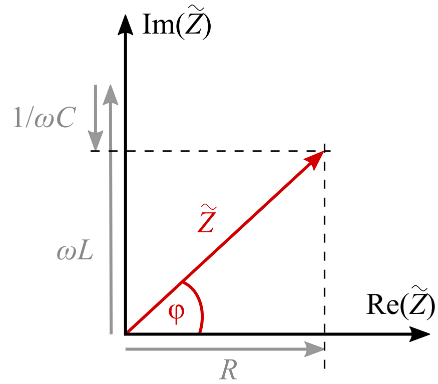

Abb. 2: Darstellung komplexer Impedanzen in der *Gaußschen Zahlenebene.*

Die Phasenverschiebung von Spannung und Strom verschwindet gerade im Resonanzfall, die Impedanz ist in diesem Fall reell. *Wie sieht die Darstellung des komplexen Widerstands in der Gaußschen Zahlenebene für die RC- und die RL-Serienschaltung aus?*

Zeitverläufe von Spannungen und Strömen

Die folgenden Definitionen des linearen Mittelwerts, Effektivwerts und Scheitelwerts sind für Spannungen angegeben, gelten aber gleichermaßen für Ströme.

Mittelwert

Der lineare Mittelwert berechnet sich zu

$$\bar{U} = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T U(t)dt. \tag{15}$$

Bei sinusförmigen Wechselspannungen mit $U(t) = U_0 \sin(\omega t)$ gilt $\bar{U} = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T U_0 \sin(\omega t)dt = 0$.

Effektivwert

Der Effektivwert U_{eff} ist der quadratische Mittelwert von $U(t)$

$$U_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_0^T (U(t))^2 dt} \tag{16}$$

und entspricht der (fiktiven) Gleichspannung, die in einem Widerstand dieselbe Leistung umsetzt wie die periodische Spannung $U(t)$. Bei sinusförmigen Wechselspannungen mit $U(t) = U_0 \sin(\omega t)$ gilt

$$U_{\text{eff}} = \frac{1}{\sqrt{2}} U_0, \quad I_{\text{eff}} = \frac{1}{\sqrt{2}} I_0. \tag{17}$$

So entspricht der Effektivwert des Wechselstromnetzes von 230 V einer Scheitelspannung von 325 V.

Spitzenwert

Der während einer Periode angenommene Maximalwert heißt Spitzenwert oder Scheitelwert U_{s} mit

$$U_{\text{s}} = \max_{0 \leq t \leq T} U(t). \tag{18}$$

Bei sinusförmigen Wechselspannungen mit $U(t) = U_0 \sin(\omega t)$ gilt $U_{\text{s}} = U_0$.

Experiment

Beim Versuch werden zwei aus einer Schaltung abgegriffene Spannungen mit Hilfe eines Zweikanaloszilloskops dargestellt. Die Phasenbeziehung zwischen Strom und Spannung kann bestimmt werden, wenn das Stromsignal $I(t)$ über den Spannungsabfall an einem ohmschen Widerstand $U_R(t)$ dargestellt wird, da $U_R(t) \sim I(t)$. Die für den Versuch benötigte sinusförmige Wechselspannung wird einem kontinuierlich durchstimmbaren Funktionsgenerator entnommen. Bestimmen Sie die Frequenz der Spannung aus dem Oszilloskopbild, indem Sie die Periodendauer ablesen. Die Phasenverschiebung φ wird aus dem Oszilloskopbild dadurch bestimmt, dass man die Nulldurchgänge (gleicher Phase) beider Signale miteinander vergleicht. Zum Ablesen empfiehlt es sich, das Oszilloskop auf etwa gleiche Amplitudenskalen einzustellen, damit die horizontale Achse in etwa unter dem gleichem Winkel geschnitten wird. Durch Einstellung des Schalters TIMEBASE kann die Zeitachse des Oszilloskopbilds skaliert werden. Verschiebungen in der Horizontalen und Vertikalen sind mit Hilfe der Reglers POSITION möglich. Bei großen Phasenverschiebungen ($\varphi > 75°$) sinkt wegen der dann rasch ansteigenden tan-Funktion die Genauigkeit rasch ab. Nehmen Sie in diesem Fall ebenfalls die Spitzenwerte von Strom und Spannung als Kontrollwerte auf. Zur Bestimmung dieser Werte die Eingangsverstärker auf kalibrierte Verstärkerwerte zu schalten (eingerasteter roter Feinregler). Achten Sie zusätzlich auf eine gemeinsame Masse der darzustellenden Spannungen.

Versuchsaufgaben

1. Phasenverschiebung im *RC*-Kreis

Bauen Sie eine *RC*-Serienschaltung gemäß Abb. 3 auf. Die Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung soll für mindestens zehn Frequenzen zwischen 100 und 1000 Hz bestimmt werden. Tragen Sie die Phasenverschiebung über der Kreisfrequenz auf und vergleichen Sie das Ergebnis mit der durch Rechnung zu ermittelnden Phasenbeziehung φ, wobei

$$\tan(\varphi) = -\frac{1}{\omega RC}. \tag{19}$$

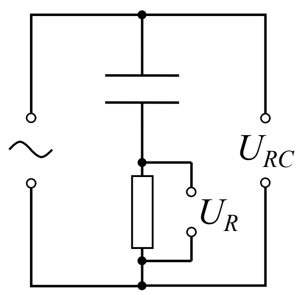

Abb. 3: *RC*-Kreis.

Stellen Sie das Ergebnis der Impedanz $\tilde{Z}$ für eine ausgewälte Kreisfrequenz in der komplexen Zahlenebene graphisch dar (vgl. Abb. 2). Bestimmen Sie die Zeigerlänge aus den Scheitelwerten für Strom und Spannung mit Hilfe des Oszilloskops. Diskutieren Sie Ihre Ergebnisse.

2. Phasenverschiebung im *RL*-Kreis und Induktivität einer Spule

Bestimmen Sie mit Hilfe der in Abb. 4 skizzierten Schaltung die Induktivität einer Spule mit 1000 Windungen mit und ohne Eisenkern. Nehmen Sie dazu wieder die Phasenverschiebung zwischen Strom und der Gesamtpannung U_{RL} für mindestens zehn verschiedene Werte zwischen 100 und 1000 Hz auf. Die Induktivität der Spule L folgt dann aus der Gleichung

$$\tan(\varphi) = \frac{\omega L}{R}. \tag{20}$$

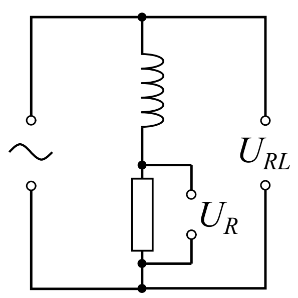

Abb. 4: *RL*-Kreis.

Beachten Sie dabei, dass sich der Gesamtwiderstand aus dem Gleichstromwiderstand der Spule (dieser ist an der Spule angegeben) und dem ohmschen Widerstand zusammensetzt. Tragen Sie die Phasenverschiebung φ und die Induktivität der Spule L als Funktion der Kreisfrequenz für die Messung mit und ohne Eisenkern auf. Was fällt Ihnen auf? Schätzen Sie die Permeabilität des Eisenkerns ab, indem Sie Streuverluste der Spule mit und ohne Eisenkern vernachlässigen. Diskutieren Sie Ihre Ergebnisse.

3. Phasenverschiebung und Resonanz im *RLC*-Kreis

Bauen Sie einen Serienkreis aus einer Induktivität L (ohne Eisenkern), einem ohmschen Widerstand R und einer Kapazität C auf (s. Abb. 5). Bestimmen Sie die Phasenbeziehung zwischen Strom und Gesamtspannung U_{RLC} im Frequenzbereich von 100 bis 1000 Hz in 20 Schritten und über diese Messung die Resonanzfrequenz ω_{res} bzw. f_{res}. Überlegen Sie, wie Sie hierbei die größte Genauigkeit erreichen können. Bestimmen sie zusätzlich über Scheitelwertmessungen den Betrag der Impedanz als Funktion der Frequenz zwischen 100 bis 1000 Hz.

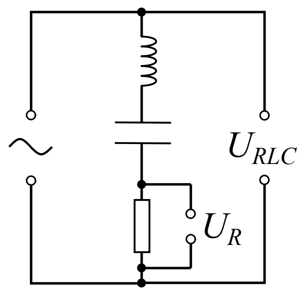

Abb. 5: *RLC*-Kreis.

Stellen Sie die Ergebnisse graphisch dar. Bei der Resonanzkreisfrequenz $\omega_{\text{res}} = 2\pi f_{\text{res}}$ wird die Phasenverschiebung $\varphi = 0$ und der Betrag der Impedanz $|\tilde{Z}|$ minimal. Bestimmen Sie die Resonanzfrequenz f_{res} aus den Messdaten und rechnerisch die theoretische Resonanzfrequenz

$$\tan(\varphi) = \frac{\omega_{\text{res}} L - 1/\omega_{\text{res}} C}{R} = 0. \tag{21}$$

Berücksichtigen Sie auch hier wieder den Gleichstromwiderstand der Spule. Diskutieren Sie die Ergebnisse.