3. Übungsblatt

Abgabe: keine Abgabe

**Fragen zu den Aufgaben:** Uwe Motschmann, Raum 3.312, Tel.: 391-5186, u.motschmann@tu-bs.de

6. **Gestreckte sphärische Koordinaten**

Der Zusammenhang zwischen gestreckten sphärischen Koordinaten $(\chi, \theta, \varphi)$ und gewöhnlichen kartesischen Koordinaten $(x^1, x^2, x^3)$ im dreidimensionalen euklidischen Raum ist gegeben durch

$$\begin{aligned} x^1 &= \sinh\chi \sin\theta \cos\varphi \\ x^2 &= \sinh\chi \sin\theta \sin\varphi \\ x^3 &= \cosh\chi \cos\theta \end{aligned}$$

(a) Berechnen Sie das Linienelement $ds^2$ für gestreckte sphärische Koordinaten.

(b) Im folgenden beschränken wir uns auf die $x^2 = 0$ Ebene, was $\varphi = 0$ entspricht. Berechnen Sie die Jacobi-Matrix $A^a{}_{b'} = \frac{\partial x^a}{\partial \xi^{b'}}$ für die Transformation von $(x^1, x^3)$ nach $(\chi, \theta)$ mit $\xi^{1'} = \chi$, $\xi^{2'} = \theta$. Berechnen Sie auch die inverse Matrix $A^{a\prime}_{b}$.

7. **Tensoren**

Als einen Tensor n-ter Stufe bezeichnen wir eine physikalische oder geometrische Größe, deren Komponenten sich beim Übergang von einem Koordinatensystem KS zu dem System KS' folgendermaßen verhalten:

$$T^{i'j'k'\cdots} = A^{i'}{}_l \, A^{j'}{}_m A^{k'}{}_n \cdots \, T^{lmn\dots} \quad , \tag{1}$$

wobei $A^{i'}{}_l$ die Jacobi-Matrix der Koordinatentransformation darstellt,

$$A^{i'}{}_l = \frac{\partial \xi^{i'}}{\partial \xi^l} \quad . \tag{2}$$

Für die kovarianten oder gemischten Komponenten gelte natürlich das entsprechende Transformationsverhalten.

Zeigen Sie:

(a) Wenn $T_{ij}$ symmetrisch ist, dann ist auch $T^{ij}$ symmetrisch.

(b) Wenn $T^{ij}$ ein Tensor und $T^{ij}\ N_{ij}$ eine Invariante (Tensor 0. Stufe) ist, dann ist $N_{ij}$ ebenfalls ein Tensor. Dies bezeichnet man auch als den *Quotientensatz*.

(c) $\underline{C}$ und $\underline{B}$ seien beliebige Tensoren 1. Stufe. Es gelte die Relation

$$C^k = D^{ki} B_i$$

Dann sind $D$'s ebenfalls Tensorkomponenten.

(d) Die Spur des Produktes aus einem symmetrischen und einem antisymmetrischen Tensor ist null.

*Bitte wenden→*

8. **Metrischer Tensor**

Wir betrachten die Transformation von kartesischen Koordinaten zu Zylinderkoordinaten. Rechnen Sie explizit nach, dass sich der metrische Tensor $g_{ab}$ wie ein Tensor 2. Stufe transformiert.