



2. Übungsblatt

Abgabe: keine Abgabe

Fragen zu den Aufgaben: Uwe Motschmann, Raum 3.312, Tel.: 391-5186, u.motschmann@tu-bs.de

4. Nichteuklidische Geometrie

Stellen Sie sich zwei Koordinatensysteme vor: ein Inertialsystem IS und ein um die x^3 -Achse des Systems IS rotierendes Bezugssystem KS' . Ein Kreis mit dem Durchmesser d in der x^1x^2 -Ebene im System IS wird nach der Koordinatentransformation ins System KS' auch als ein Kreis mit dem gleichen Durchmesser gesehen, aber der Umfang U des Kreises erscheint wegen der Lorentzkontraktion (tangential zur Rotationrichtung) unterschiedlich in den beiden Systemen.

- (a) Warum ändert sich der Durchmesser nicht?
- (b) Zeigen Sie, dass das Verhältnis zwischen dem Umfang und dem Durchmesser im rotierenden System KS' größer als π ist. Das ist ein Beispiel für den Zusammenhang zwischen beliebigen Bezugssystemen und der nichteuklidischen Geometrie.

Anleitung: Betrachten Sie kleine Abschnitte δU des Umfanges und wenden Sie näherungsweise darauf die Gesetze der speziellen Relativitätstheorie an.

5. Krummlinige, nicht-orthogonale Koordinaten

Als Beispiel für krummlinige und nicht-orthogonale Koordinaten ξ^1, ξ^2, ξ^3 betrachten wir (x^1, x^2, x^3 sind kartesische Koordinaten)

$$x^1 = a \xi^1 \cos(\xi^2) \quad ; \quad x^2 = b \xi^1 \sin(\xi^2) \quad ; \quad x^3 = c \xi^3 \tag{1}$$

mit $a, b, c \neq 0$.

- (a) Stellen Sie die ko- und kontravariante Basis ($\{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3\}$ bzw. $\{\underline{b}^1, \underline{b}^2, \underline{b}^3\}$) sowie den metrischen Tensor auf. Wie lassen sich die einzelnen Einträge des metrischen Tensors interpretieren?
- (b) Berechnen Sie $ds^2 = d\underline{r} \cdot d\underline{r}$ in den kartesischen Koordinaten x^a und den krummlinigen Koordinaten ξ^a .
- (c) Skizzieren Sie die Koordinatenlinien in der (x^1, x^2) -Ebene für $a = 1, b = 2$ und zeichnen Sie die ko- und kontravarianten Basisvektoren in den Punkten $(\xi^1, \xi^2) = (1, \pi/4)$ bzw. $(\xi^1, \xi^2) = (1, \pi/2)$ ein. Welche Gleichungen beschreiben die Linien $\xi^1 = \text{const}$ bzw. $\xi^2 = \text{const}$ in kartesischen Koordinaten?
- (d) Im Punkt $P = (\xi^1, \xi^2) = (1, \pi/4)$ haben zwei Vektorfelder $\underline{E}_I, \underline{E}_{II}$ bezüglich kartesischer Einheitsvektoren $\{e_1, e_2\}$ die Darstellungen $\underline{E}_I = e_1 + 2e_2$ bzw. $\underline{E}_{II} = 2e_2$. Stellen Sie diese Vektoren bezüglich der Basen $\{\underline{b}_1, \underline{b}_2\}$ und $\{\underline{b}^1, \underline{b}^2\}$ dar. Berechnen Sie das Skalarprodukt $\underline{E}_I \cdot \underline{E}_I$ in kartesischen Koordinaten und in den Koordinaten ξ^1, ξ^2 .