

Aussteifung von Obergurten über Dachlatten auf einen Verband

M. H. Kessel und A. Kühl

Zusammenfassung

Die folgenden Betrachtungen haben das Ziel, die Beanspruchungen und die Wirksamkeit von Dachlatten und ihren Verbindungen in ihrer Funktion als Abstützungen von schlanken Druckstäben auf einen Verband zu beschreiben. Dabei geht es speziell um Druckstäbe im Sinne von schlanken gedrückten Obergurten von Fachwerkträgern, wie sie z. B. in der Nagelplattenbauart die Regel sind. Die Betrachtungen gelten für Druckstäbe mit konstanter Normalkraft unter Berücksichtigung ihrer möglichen Imperfektionen und Lagerungen. Die Wirksamkeit der Aussteifung ist abhängig von der Steifigkeit der Dachlatten und der Steifigkeit des Verbandes. Die maximalen Beanspruchungen des Druckstabs, der Dachlatten und des Verbandes ergeben sich aus jeweils unterschiedlichen Eigenformen und zugehörigen affinen Imperfektionen.

Abstract

Bracing of Top Chords by means of Roof Battens

The purpose of the following considerations is to describe the loads acting on roof battens and their connections as well as their efficacy in their function as a support of slender compression struts on the bracing system. The focus is on compression struts in the sense of slender compressed top chords of trusses, which is how they are usually used in nail plate construction. The considerations apply for compression struts under constant normal force considering their potential imperfections and bearings. The efficacy of the provided support depends on the stiffness of the roof battens and the stiffness of the bracing system. The maximum loads of the compression struts, the roof battens and the bracing system result from the different eigenmodes and the corresponding affine imperfections.

Univ.-Prof. Dr.-Ing. Martin H. Kessel VDI
Prüfingenieur für Baustatik VPI
Dipl.-Ing.(FH) Alexander Kühl
Ingenieurbüro kgs
Lavesstr. 4
31137 Hildesheim
info@ingenieurbuero-kgs.de

1 Einleitung

Tragfähige Druckstäbe müssen nicht nur eine ausreichende Druckfestigkeit, sondern auch eine ausreichende Biegesteifigkeit besitzen, da sie immer imperfekt u. a. in dem Sinne sind, dass sie nicht ideal gerade sind, sondern Vorkrümmungen v_e aufweisen. Dadurch ergeben sich neben den Druckbeanspruchungen aus der Normalkraft N zusätzliche Biegebeanspruchungen aus dem Moment $M = Nv_e$.

1.1 Konstruktionsvarianten imperfekter Druckstäbe

Um Letzteren ausreichenden Widerstand leisten zu können, ist es für frei stehende einzelne Druckstäbe wegen der Zufälligkeit der Ausrichtung möglicher Imperfektionen i.d.R. am wirtschaftlichsten, eine kreisförmige oder zumindest quadratische Querschnittsform mit ausreichend großem Durchmesser d oder ausreichend großer Kantenlänge d zu wählen, wie in **Bild 1a** dargestellt. Die Mindestabmessung d ergibt sich aus der Druckkraft F und der Stablänge l .

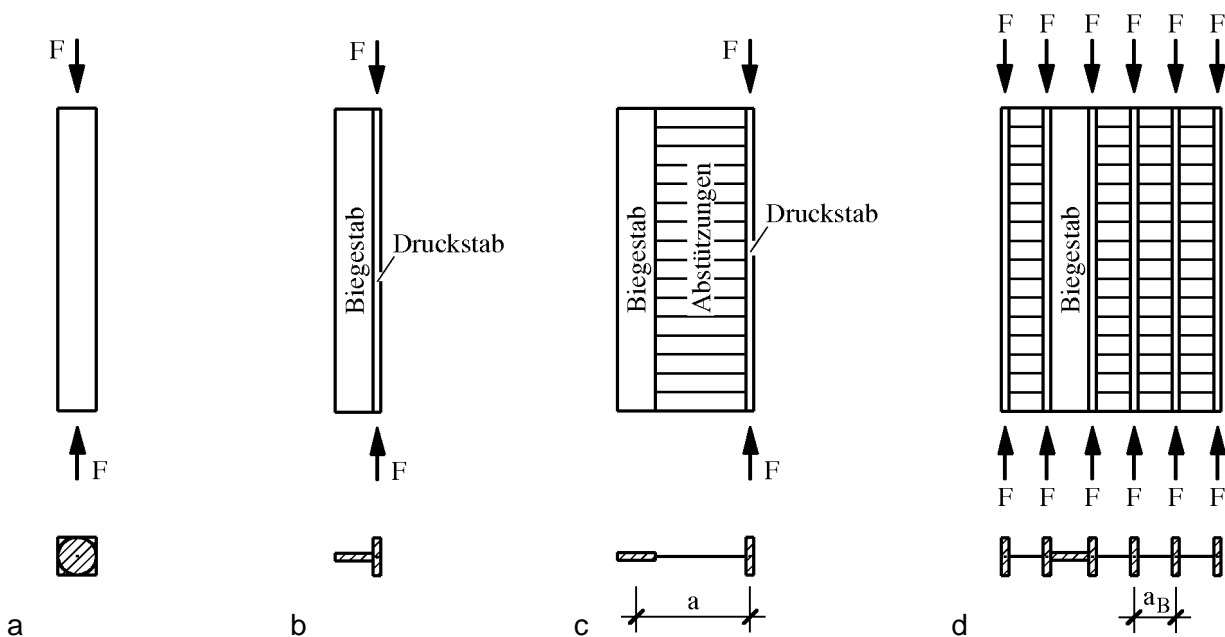


Bild 1: a Druckstab mit großer Eigenbiegesteifigkeit, b T-Querschnitt bestehend aus Druckstab mit direkt verbundenem Biegestab, c Druckstab durch Pendelstäbe mit Biegestab verbunden, d Druckstäbe als Primärsysteme direkt oder durch Pendelstäbe mit Biegestab verbunden

Figure 1: a Compression strut with large bending stiffness, b T-cross-section consisting of compression strut and directly connected bending member, c compression strut connected to bending member by means of hinged supports; d compression strut connected either directly to the bending member or by means of hinged supports.

Nun ist bekannt, dass die Druckfestigkeit des Holzes durch andere Querschnittsformen (geschlossen oder offen) anstelle von Vollquerschnitten wesentlich besser ausgenutzt und dadurch Material eingespart werden kann. Von diesen Formen interessiert für die folgenden Betrachtungen nur der in **Bild 1b** dargestellte offene T-Querschnitt.

Dieser T-Querschnitt möge die folgenden besonderen Eigenschaften besitzen:

- Der Querschnitt ist nicht monolithisch, sondern setzt sich wie im Holzbau aus fertigungstechnischen Gründen üblich aus zwei schlanken Teilen zusammen. Sie sind kontinuierlich elastisch verbunden.
- Der Verbund besitzt eine besondere Eigenschaft. Er ist nur für Zug, Druck und Schub senkrecht zur Stabachse (z-Richtung) des Druckstabes und nicht für Schub parallel zur Stabachse (x-Richtung) wirksam. Der Verbund hat also keinen Einfluss auf die Biegesteifigkeit des Druckstabes.
- Die Druckkraft F wird nur in ein Querschnittsteil eingeleitet.

Diese besonderen Eigenschaften erzeugen einen Quasi-T-Querschnitt und aus seinen beiden Teilen entsteht

- erstens ein Druckstab, der in der einen der beiden möglichen Durchbiegungsrichtungen (z-Richtung) völlig eigenständig trägt (**Bild 2a**), und
- zweitens ein Biegestab, der durch F nicht direkt auf Druck beansprucht wird, sondern indirekt durch den Verbund auf Biegung, weil der Druckstab in der anderen der beiden möglichen Durchbiegungsrichtungen (y-Richtung) eine nur sehr geringe Biegesteifigkeit EI_z besitzt, was einer großen Knickschlankheit $\lambda_{c,z}$ gleichbedeutend ist (**Bild 2b**). Er muss sich daher mit Hilfe des Verbundes auf den Biegestab abstützen, um einen Biegedruckbruch oder bei großer Schlankheit $\lambda_{c,z}$ übermäßige Verformungen in y-Richtung zu vermeiden,
- und drittens rückwirkend aus dem Druckstab ein Biege- und Druckstab, da sich der Biegestab wegen seiner großen Kippschlankheit $\lambda_{m,y}$ - aus vorgenannten Gründen der Materialminimierung - durch den Schubverbund Q_z in z-Richtung auf den Druckstab abstützt (**Bild 2c**).

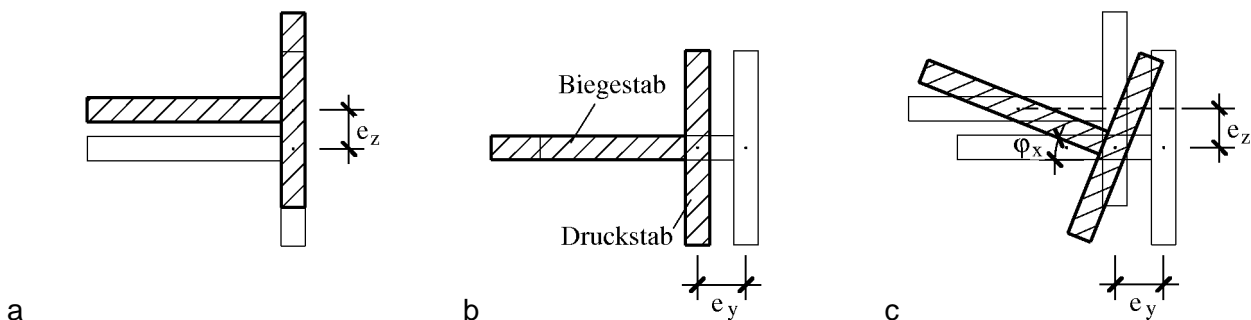


Bild 2: a Vorkrümmung e_z des Druckstabes (Knicken um die starke Achse), b Vorkrümmung e_y des Druckstabes (Knicken um die schwache Achse), c Vorkrümmung e_y des Druckstabes und gleichzeitige Vorkrümmung e_z (oder Vorverdrillung φ_x) des Biegestabes (Kippen)

Figure 2: a Initial curvature e_z of the compression strut (buckling about the strong axis), b initial curvature e_y of the compression strut (buckling about the weak axis), c initial curvature e_y of the compression strut and simultaneous initial curvature e_z (or initial twisting φ_x) of the bending member (lateral buckling)

Der Verbund bleibt also in **Bild 2a** unbeansprucht, in **Bild 2b** wird er auf Zug oder Druck beansprucht und nur in **Bild 2c** zusätzlich auf Schub Q_z senkrecht zur Stabachse des Druckstabes. Der auf Zug oder Druck beanspruchte Verbund erfordert keinen direkten Kontakt der Bauteile, sondern kann auch durch Pendelstäbe erzeugt werden, so dass ein nahezu beliebiger Abstand a von Druckstab und Biegestab möglich wird, wie in **Bild 1c** dargestellt. Voraussetzung hierfür ist,

- dass der Schubverbund Q_z , der das Kippen des schlanken Biegestabes verhindert, durch gleichwertige Konstruktionen und Verbindungen ersetzt wird
- und dass die Pendelstäbe und ihre Verbindungen ausreichend steif sind.

Wird der Druckstab mit dem Biegestab durch Pendelstäbe verbunden, dann werden diese verbindenden Bauteile als „Abstützungen“ bezeichnet, weil sie den Druckstab auf den Biegestab abstützen. Ohne den Biegestab sind die Abstützungen wirkungslos.

Erst dadurch, dass der Druckstab nicht direkt mit dem Biegestab verbunden sein muss, wird es möglich, eine Vielzahl von Druckstäben, „Primär(trag)systeme“ genannt, mit einem einzigen Biegestab ausreichender Steifigkeit EI_z zu verbinden. Die zuvor genannten für den nach wie vor schlanken Biegestab erforderlichen und dem Schubverbund Q_z gleichwertigen Konstruktionen und Verbindungen sind automatisch vorhanden, wenn, wie in der Regel üblich, der Biegestab zwischen zwei Primärsystemen angeordnet und für Q_z mit diesen verbunden wird, wie in **Bild 1d** dargestellt.

Dieser einzige Biegestab wird dann als „Aussteifungsträger“ bezeichnet, weil er die Druckstäbe steifer macht. Ohne direkten Verbund Q_z des schlanken Aussteifungsträgers mit den beiden benachbarten Primärsystemen ist dieser in der Regel auf Grund seiner geringen Steifigkeit EI_y wirkungslos. Der Aussteifungsträger zusammen mit den beiden Primärsystemen werden als „Sekundär(trag)system“ bezeichnet. Da hier als Primärsysteme nur einfache gerade Druckstäbe behan-

delt werden, hat das Zusammenwirken von Aussteifungsträger und Primärsystemen durch den Verbund Q_z keine Auswirkung auf die Beanspruchungen des Aussteifungsträgers und die Beanspruchungen der Abstützungen. Das stets räumliche Tragverhalten des Sekundärsystems wird daher im Weiteren nicht thematisiert.

Zusammenfassend gilt, dass der Tragwerksplaner aus drei möglichen konstruktiven Maßnahmen auswählen kann, die eine ausreichende Biegesteifigkeit eines Druckstabes zur Berücksichtigung der durch Imperfektionen verursachten Beanspruchungen sicherstellen:

- die Wahl ausreichend großer Querschnittsabmessungen,
- die direkte Verbindung jedes einzelnen Druckstabes mit einem zusätzlichen Biegestab oder
- die Abstützung einer Vielzahl von Druckstäben auf einen einzigen Biegestab.

1.2 Dachlatten und Verband

Die folgenden Betrachtungen haben das Ziel, die Beanspruchungen und die Wirksamkeit von Dachlatten und ihren Verbindungen in ihrer Funktion als Abstützungen von Druckstäben auf ein Sekundärsystem entsprechend **Bild 1d** zu beschreiben. Dabei sind weniger Druckstäbe im Sinne von Stützen gemeint, wie zunächst zur Erläuterung in **Bild 1** geschildert. Vielmehr geht es insbesondere um Druckstäbe im Sinne von schlanken gedrückten Obergurten von Fachwerkträgern, wie sie z. B. in der Nagelplattenbauart die Regel sind. Die Betrachtungen gelten für Druckstäbe mit konstanter Normalkraft $N = F$ und ihren später im Einzelnen genannten Imperfektionen und Lagerungen.

Obwohl die Normalkraft in den Obergurten von Fachwerkträgern nie konstant verteilt ist, kann zumindest für Abschnitte von Obergurten und nach Kessel [1] speziell für dreieckförmige Fachwerkträger (Dreieckbinder) eine konstante Verteilung angenommen werden, um die durch Imperfektionen senkrecht zur Binderebene verursachten Beanspruchungen zu bestimmen. Die tatsächlich veränderliche Normalkraft wird zu diesem Zweck durch eine mittlere Normalkraft ersetzt, die konstant über die Abschnittslänge oder die gesamte Gurtlänge wirkt.

In der Nagelplattenbauart und ihr verwandten Bauarten ist der Aussteifungsträger ein eigenständiges vorgefertigtes Bauteil, nämlich ein Fachwerkträger mit konstanter Höhe. Er wird daher auch als „Verband“ bezeichnet. Diese Bezeichnung wird auch hier benutzt. In anderen Bauarten kann der Aussteifungsträger erst auf der Baustelle zusammengebaut werden, indem die beiden Primärsysteme nur durch Diagonalen und Vertikalen verbunden werden. Dann werden die Gurte des Aussteifungsträgers durch Teile der beiden Primärsysteme, in der Regel durch die Obergurte, gebildet. Für die Beurteilung des Tragverhaltens des Aussteifungsträgers kann die Bezeichnung Verband in diesen Fällen irreführend sein, weil die Obergurte dann zwei Funktionen gleichzeitig erfüllen und damit die zuvor geschilderte Voraussetzung, dass es keinen Schubverbund Q_x von Druckstab und Biegestab gibt, nicht erfüllt ist.

1.3 Die drei Funktionen von Dachlatten

Dachlatten haben drei statische Funktionen, die sämtlich erhebliche Bedeutung für die Sicherheit von Personen besitzen, die während der Errichtungs- und Nutzungsdauer zeitweise auf und fast ständig unterhalb des Daches tätig sind. Sie tragen den Dachdecker, sie tragen die Dacheindeckung und sie stützen ihre Unterkonstruktion in Form von schlanken druck- und biegebeanspruchten Obergurten. Im Folgenden wird das Tragverhalten von Dachlatten ausschließlich in ihrer abstützenden Funktion beschrieben, wie in **Bild 1d** schematisch dargestellt.

Die folgenden Ergebnisse können sinngemäß auch auf Dachschalungen aus Brettern und ihren Verbindungen übertragen werden, soweit sie nur abstützende Funktion haben.

2 Steifigkeit der Dachlatten und ihrer Verbindungen

Wird die einzelne Dachlatte betrachtet, so handelt es sich dabei um eine diskrete Einzelabstützung. Wird die Summe der einen Obergurt stützenden Dachlatten betrachtet, die in einem kontinuierlichen Abstand a_L angeordnet sind, so erfahren die Obergurte durch die Dachlatten eine Art elastische Bettung k . Die Art und Steifigkeit dieser elastischen Bettung ergibt sich zum einen aus der Dehnsteifigkeit der Dachlatten selbst und zum anderen aus der Steifigkeit ihrer Verbindungen.

Wenn ein Dach n_B Binder bzw. Obergurte besitzt, die durch n_V Verbände ausgesteift werden, dann werden n_B/n_V imperfekte Obergurte durch einen Verband ausgesteift. Wenn weiter angenommen wird, dass für die Stützkraft $Q_{y,i}$, mit der sich ein Obergurt i auf einer Dachlatte L abstützt, gilt

$$Q_{y,i} = Q_{y,O-L} = q_y a_L, \quad (1)$$

so verschiebt sich der am weitesten rechts oder links vom Verband entfernte Obergurt $i = n_O$ mit $n_O \leq n_B/n_V$ an der Stelle der Dachlatte L gegenüber dem Verband um

$$v_{O,L} = \underbrace{\frac{Q_{y,O-L}}{K_{O-L}}}_{\text{Verbindung Obergurt-Dachlatte}} + \underbrace{\frac{Q_{y,O-L}}{EA_L} \sum_{i=1}^{n_O} i a_B}_{\text{Dachlatte}} + \underbrace{\frac{n_B}{n_V} \frac{Q_{y,O-L}}{K_{L-V}}}_{\text{Verbindung Dachlatte-Verband}} = \frac{Q_{y,O-L}}{K_{i_0}} = \frac{q_y}{k} \quad (2)$$

mit dem Binder- oder Obergurtabstand a_B . Die Bettungssteifigkeit k ist demnach über die Obergurtlänge konstant und vom Funktionsverlauf von q_y und $v_{O,L}$ unabhängig. In dem Verschiebungsanteil aus den Dachlatten wird berücksichtigt, dass sich die Beanspruchungen aus den einzelnen Obergurten $i = 1, 2, \dots, n_O$ zum Verband hin kontinuierlich aufbauen.

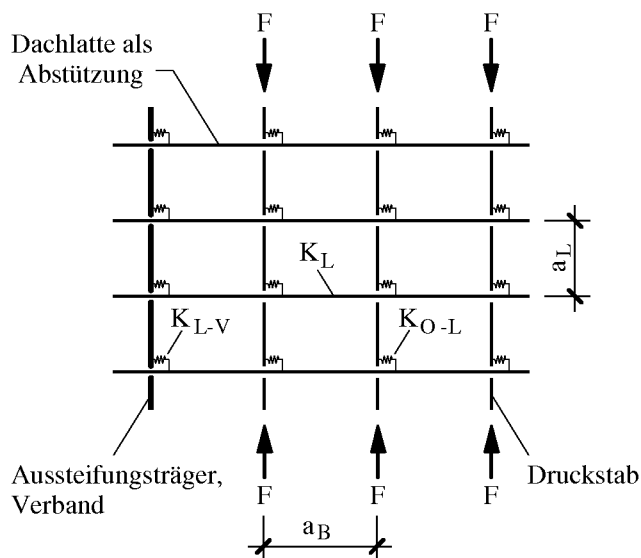


Bild 3: Statisches Modell

Figure 3: Static Model

Für den maßgebenden Obergurt $i = n_O$ ergibt sich die Bettungssteifigkeit

$$k = \frac{K_{n_O}}{a_L} = \frac{1}{a_L \left(\frac{1}{K_{O-L}} + \frac{1}{K_L} + \frac{1}{K_{L-V}} \right)} \quad (3)$$

aus der Steifigkeit der Verbindung Obergurt an Dachlatte

$$K_{O-L,u} = \frac{2 n_{vbm} K_{ser}}{3 \gamma_M}, \quad (4)$$

der Dehnsteifigkeit der Dachlatte

$$K_{L,u} = \frac{E_{0,mean} A_L}{\gamma_M \sum_{i=1}^{n_o} i a_B} = \frac{E_{0,mean} A_L}{\gamma_M \ell_{L,ef}} \quad (5)$$

und der Steifigkeit der Verbindung Dachlatte an Verband

$$K_{L-V,u} = \frac{2 n_{vbm} K_{ser} n_V}{3 \gamma_M n_B}. \quad (6)$$

Die wirksame Dachlattenlänge $\ell_{L,ef}$, lässt sich mit Hilfe der Summenformel der arithmetischen Reihe angeben in der Form

$$\ell_{L,ef} = a_B \sum_{i=1}^{n_o} i = \frac{1}{2} n_o (n_o + 1) a_B. \quad (7)$$

Der maßgebende Obergurt ist der mit der geringsten Bettungsteifigkeit, also der am weitesten vom Verband entfernte Obergurt. Für jeden zusätzlich rechts oder links an den Verband angeschlossenen Obergurt nimmt die Bettungsteifigkeit weiter ab. Auf Grund dieser mit zunehmender Entfernung vom Verband abnehmenden Steifigkeiten ist die maximale Anzahl der Obergurte rechts oder links des Verbandes nach *Kessel und Kühl* [4] auf $n_o \leq 5$ zu begrenzen. Durch einen Verband können also maximal 12 Obergurte einschließlich der beiden Obergurte (Primärsysteme), mit denen der Verband direkt verbunden ist, ausgesteift werden. Besitzt ein Dach n_B Binder bzw. Obergurte, so sind für dieses Dach n_V Verbände mit $n_V \geq n_B/12$ erforderlich.

3 Imperfektionen, Verformungen und kritische Lasten des Obergurtes

Ein Obergurt der Länge ℓ und der Biegesteifigkeit EI soll sich über Dachlatten mit der Bettungsteifigkeit k auf einen Verband mit der Biegesteifigkeit B abstützen. Die Randabstützungen, die die Enden des Obergurtes mit den Enden des Verbandes verbinden, das sind z. B. bei einem Dreieckbinder die Trauf- und Firstbohlen, sollen einschließlich ihrer Verbindungen wesentlich steifer als ka_L sein. Dann kann das Tragverhalten durch das in **Bild 4a** dargestellte Modell ausreichend genau beschrieben werden.

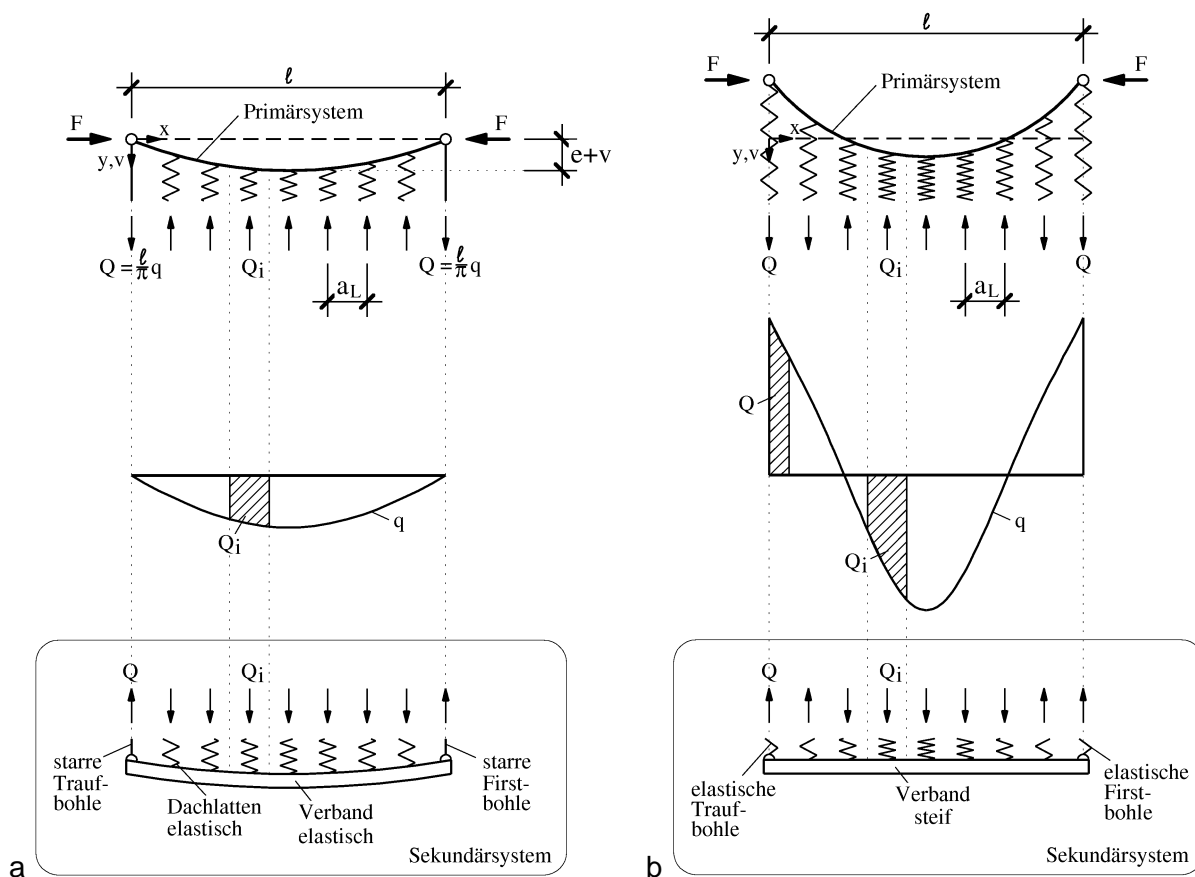


Bild 4: Ebenes statisches Modell eines durch Dachlatten und Randabstützungen gestützten Obergurtes mit halbwelliger Vorkrümmung ($m=1$)

Figure 4: Plane static model of a top chord with half-wave initial curvature supported by roof battens and edge bracings.

Werden wie in **Bild 4b** die Randabstützungen genauso weich ausgebildet wie die Dachlatten, würden sich insgesamt wesentlich größere Verformungen und damit Beanspruchungen aus den Imperfektionen des Primärsystems ergeben. Beachte, dass die Summe der Stützkkräfte Null ergeben muss.

Der Obergurt soll nun durch eine konstante Normalkraft $N = F$ beansprucht werden und in Form einer Sinusfunktion

$$v_e(x) = e \cdot \sin \frac{m\pi x}{l} \quad \text{mit} \quad e = \frac{l}{m\epsilon}, \quad m: \text{Anzahl der Halbwellen} \quad (8)$$

vorgekrümmt (perfekte Imperfektion) und elastisch durch Dachlatten und Verband gestützt sein. Dann erleidet er die Durchbiegung

$$v(x) = v \cdot \sin \frac{m\pi x}{l} \quad \text{mit} \quad v = v_L + v_V, \quad (9)$$

und die Wellenlänge $2l/m$ der perfekten Vorkrümmung v_e , hier als Vorkrümmungslänge bezeichnet, erzeugt eben diese Wellenlänge in der Durchbiegung v bzw. v_L und v_V . Die Differentialgleichung des so gebetteten Druckstabes

$$-kv_L - EIV'''' - Fv'' = 0 \quad (10)$$

und des durch die Bettung beanspruchten Verbandes

$$+kv_L - Bv_V'''' = 0 \quad (11)$$

sind durch die Bettung k gekoppelt. Aus Gl. 11 folgt unter Beachtung von Gl. 9

$$v_V = \frac{k\ell^4}{m^4\pi^4B} v \quad (12)$$

$$1 + \frac{k\ell^4}{m^4\pi^4B}$$

und

$$v_L = v - v_V = \frac{1}{1 + \frac{k\ell^4}{m^4\pi^4B}} v. \quad (13)$$

Gl. 13 in Gl. 10 eingesetzt liefert

$$\Rightarrow F_{\text{crit}} = \frac{k\ell^2}{1 + \frac{k\ell^4}{m^4\pi^4B}} + EI \underbrace{\frac{m^2\pi^2}{\ell^2}}_{m^2F_E}. \quad (14)$$

Die Verformung des Druckstabes

$$v = v_L + v_V = \frac{\alpha}{1 - \alpha} e \quad \text{mit} \quad \alpha = \frac{F}{F_{\text{crit}}} \quad (15)$$

folgt nach Einsetzen von Gl. 14 mit $e = \ell/m\varepsilon$

$$v = F \frac{m^4\pi^4B + k\ell^4}{(m^2F_E - F)m^4\pi^4B + \left(m^2\frac{\pi^2}{\ell^2}B + m^2F_E - F\right)\ell^4k} \frac{\ell}{m\varepsilon} \quad (16)$$

mit der kleinsten kritischen Last (Eulerkraft) des nicht gestützten Druckstabs

$$F_E = \frac{\pi^2 EI}{\ell^2} < F. \quad (17)$$

Die in Gl. 15 verwendete Abkürzung α ist als konstanter Quotient zweier aufeinanderfolgender Glieder der zugehörigen geometrischen Reihe zu verstehen und dementsprechend stets kleiner 1. Sofern die Verformungen des Verbandes bzw. der Bettung auf ein Maß ℓ/ϕ_1 begrenzt werden sollen, folgt mit $e = \ell/\varepsilon$

$$\frac{\alpha}{1 - \alpha} \frac{\ell}{\varepsilon} \leq \frac{\ell}{\phi_1} \Leftrightarrow \alpha \leq \frac{\varepsilon}{\varepsilon + \phi_1}. \quad (18)$$

Für $\varepsilon = 400$ und $\phi_1 = 500$ folgt $\alpha \leq 0,44$.

In **Bild 5** sind die Durchbiegungen der Gl. 16 in Stabmitte in Abhängigkeit von m dargestellt. Hierbei ist $\ell = 10,15 \text{ m}$, $F = 68,6 \text{ kN}$, $F_E = 3 \text{ kN}$, $\ell^2 k / \pi^2 = 4280 \text{ kN}$, $B \pi^2 / \ell^2 = 184 \text{ kN}$.

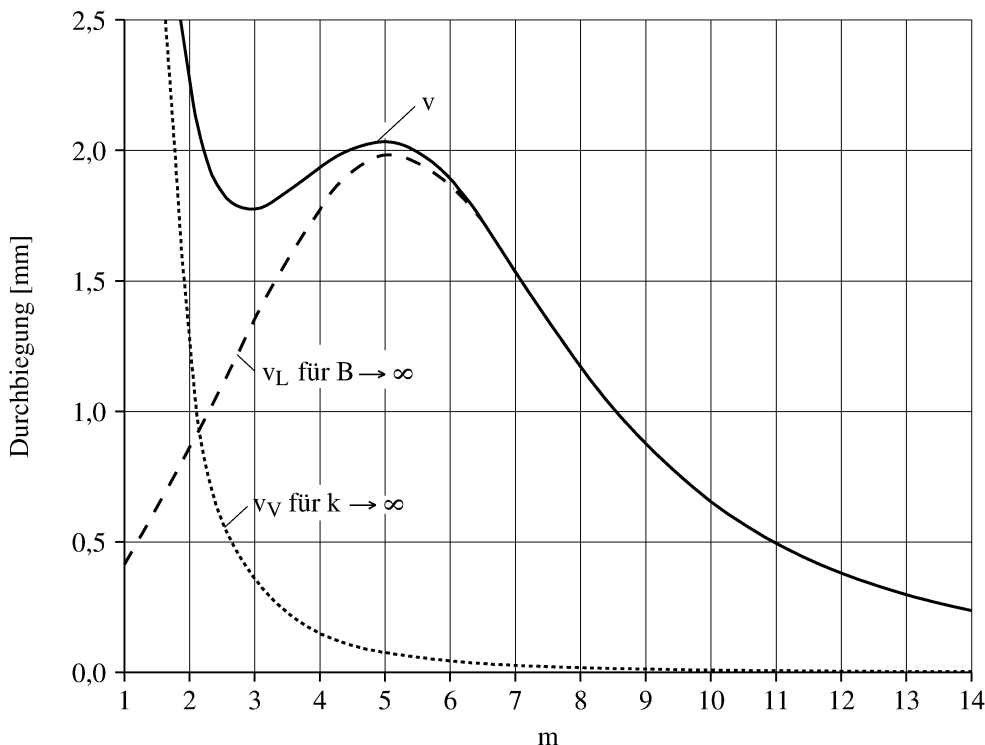


Bild 5: Maximale Amplitude der Durchbiegung v eines auf einen Verband und eine Bettung abgestützten Druckstabes (m : Anzahl der Halbwellen)

Figure 5: Maximum deflection amplitude v of a compression strut supported by a bracing system and by bedding (m : number of half-waves)

In **Bild 5** ist zu erkennen, dass die Durchbiegung v_V mit zunehmendem m bzw. abnehmender Wellenlänge deutlich und monoton abfällt, die Verbandssteifigkeit also entsprechend ansteigt, während die Bettungssteifigkeit der Abstützungen ein Extremum bei $m \gg 1$ besitzt. Dieses Extremum (Maximum der Verformung entspricht Minimum der Steifigkeit), bei dem der Verband nahezu starr ist, ergibt sich näherungsweise nach Einsetzen von Gl. 16 in Gl. 13 aus

$$\frac{d}{dm} \lim_{B \rightarrow \infty} v_L = \frac{d}{dm} \lim_{B \rightarrow \infty} \left(\frac{m^4 \pi^4 B F}{(m^2 F_E - F) m^4 \pi^4 B + \left(m^2 \frac{\pi^2}{\ell^2} B + m^2 F_E - F \right) \ell^4 k} \frac{\ell}{m \varepsilon} \right) = 0. \tag{19}$$

Nach einigen Umformungen folgt daraus

$$m_{L,max} = \sqrt{\frac{1}{6} \frac{F}{F_E} + \sqrt{\left(\frac{1}{6} \frac{F}{F_E} \right)^2 + \frac{\ell^2}{3\pi^2} \frac{k}{F_E}}}. \tag{20}$$

Für das Beispiel in **Bild 5** ist $m_{L,max} = 5,1$. Für $m = 1 = m_{V,max}$ können die Verformungen der Dachlaten gegenüber denen des Verbandes vernachlässigt werden. Umgekehrtes gilt an der Stelle $m = m_{L,max}$, wie in **Bild 6** zu erkennen ist.

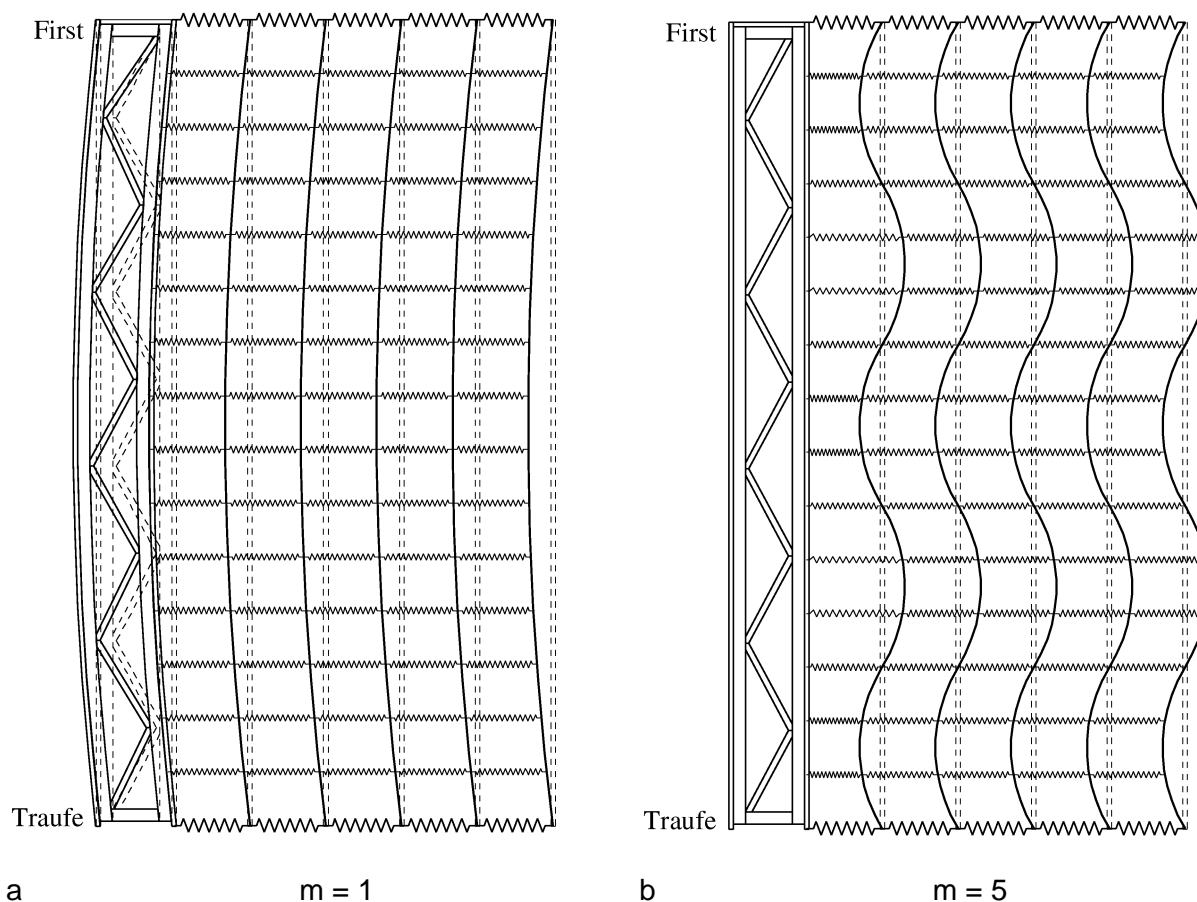


Bild 6: Verformungen der Obergurte und des Verbandes infolge der für den Verband (a) und für die Dachlatten (b) maßgebenden Vorkrümmungslängen

Figure 6: Deformations of the top chords and the bracing system resulting from the decisive initial curvature length for (a) the supporting system and (b) the roof battens.

Die in **Bild 7** für das obige Beispiel dargestellte kritische Last des ausgesteiften Druckstabs ist für eine Vorkrümmungslänge gleich der Stablänge ($m = 1$) minimal. Für sie gilt mit Gl. 14

$$F_{\text{crit,min}} = \text{Min} \left[\lim_{k \rightarrow \infty} F_{\text{crit}} \right] = F_{\text{crit,B,min}} = F_{\text{crit,B}} (m = 1) = F_E + \frac{\pi^2 B}{\ell^2} = 187 \text{ kN}. \quad (21)$$

Für das gewählte Beispiel ist diese kritische Last kleiner als

$$\text{Min} \left[\lim_{B \rightarrow \infty} F_{\text{crit}} \right] = F_{\text{crit,k,min}} = m_{\text{min}}^2 F_E + \frac{k \ell^2}{m_{\text{min}}^2 \pi^2} = 2\sqrt{EI k} = 224 \text{ kN} \quad (22)$$

$$\text{mit } m_{\text{min}} = 4 \sqrt{\frac{\ell^2 k}{\pi^2 F_E}} = 6,2$$

In jedem Einzelfall ergibt sich die kleinste kritische Last $F_{\text{crit,min}}$ nach Gl. 21 oder nach Gl. 22.

Die für das obige Beispiel zusätzlich in **Bild 7** dargestellte Beanspruchung der Dachlatten

$$q_L = kv_L, \quad (23)$$

die Biegebeanspruchung des Verbandes

$$M_{z,V} = q_L \frac{\ell^2}{m^2 \pi^2} \quad (24)$$

und die Biegebeanspruchung des Obergurtes

$$M_{z,OG} = \frac{F_e}{1-\alpha} - q_L \frac{\ell^2}{m^2 \pi^2} \quad \text{mit} \quad \alpha = \frac{F}{\frac{k \ell^2 m^2 \pi^2 B}{m^4 \pi^4 B + k \ell^4} + m^2 F_e} \quad (25)$$

lassen erkennen, dass mit abnehmenden Vorkrümmungslängen ($m > 1$) die Beanspruchung $M_{z,V}$ des Verbandes abnimmt, während die Beanspruchung q_L der Dachlatten und die Beanspruchung $M_{z,OG}$ des Obergurtes zunehmen und erst bei kurzen Vorkrümmungslängen ($m \gg 1$) ihr Maximum erreichen.

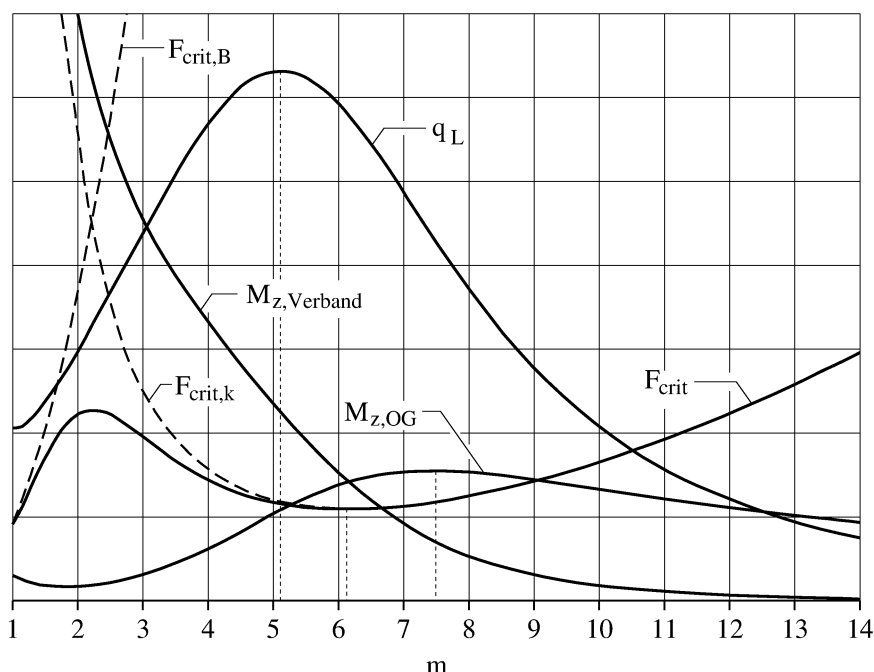


Bild 7: Kritische Druckkraft eines auf einen Verband und eine Bettung abgestützten Druckstabes (m : Anzahl der Halbwellen) und maximale Amplituden der Beanspruchungen der Dachlatten, des Verbandes und des Druckstabes

Figure 7: Critical load of a compression strut supported by a bracing system and by bedding (m : number of half-waves) and maximum stress amplitude of battens, bracing and strut

Zusammenfassend kann gesagt werden, dass für die Aussteifung eines auf einen Verband elastisch gebetteten Druckstabes drei unterschiedliche Vorkrümmungslängen maßgebend sind.

4 Beanspruchungen der Obergurte, der Abstützungen und des Verbandes

4.1 Beanspruchungen des Obergurtes

Wie anhand von **Bild 7** erläutert, ist die für die maximale Biegebeanspruchung $M_{z,OG}$ des Obergurtes verantwortliche Vorkrümmung mehrwellig ($m \gg 1$). Auf die aufwändige Bestimmung der maßgebenden Wellenlänge ℓ/m , die für die Berechnung des maximalen Biegemoments $M_{z,OG,max}$ nach Gl. 25 erforderlich wäre, wird hier verzichtet. Anstelle dessen wird $M_{z,OG,max}$ nicht aus dem Momentengleichgewicht am gebetteten Druckstab, sondern am nicht gebetteten Eulerstab II mit Hilfe der minimalen kritischen Last $F_{crit,k,min}$ nach Gl. 22 auf der sicheren Seite abgeschätzt

$$M_{z,OG,max} = F \frac{\ell_{ef,O}}{400} \frac{1}{1-\alpha} \text{ mit } \alpha = \frac{F}{2\sqrt{EI}k}. \quad (26)$$

Die Vorkrümmungslänge $\ell_{ef,O}$ ergibt sich als zugehörige Ersatzstablänge des Obergurtes aus der kritischen Last $F_{crit,min}$ in Gl. 22

$$\ell_{ef,O} = \sqrt[4]{\frac{\pi^2 F_E}{4k\ell^2}} \cdot \ell = \pi \sqrt[4]{\frac{EI_z}{4k}} \geq a_L. \quad (27)$$

Dabei ist zu beachten, dass die Ersatzstablänge nicht kleiner als der Abstand der Dachlatten a_L sein kann und damit für die kritische Last $F_{crit,min}$ gilt

$$F_{crit,min} \leq \frac{\pi^2 EI}{a_L^2}. \quad (28)$$

4.2 Beanspruchungen der Dachlatten

Die Beanspruchung der einzelnen Dachlatte ergibt sich je Obergurt zu

$$F_{O-L} = k a_L v_L. \quad (29)$$

Zur weiteren Berechnung der Beanspruchungen wird wie zuvor angenommen, dass der Verband für $m_{L,max}$ nahezu starr ist. Dann gilt $v_L = v_{L,k}$ mit

$$v_{L,k} = \frac{\ell_{ef,L}}{400} \frac{\alpha_L}{1-\alpha_L} \quad (30)$$

mit

$$\lim_{B \rightarrow \infty} \alpha = \alpha_L = \frac{F}{\frac{\pi^2 EI}{\ell_{ef,L}^2} + \frac{\ell_{ef,L}^2 k}{\pi^2}} \quad (31)$$

und der Vorkrümmungslänge $\ell_{ef,L}$, die zu den maximalen Dachlattenbeanspruchungen führt. Sie ist verschieden von der Ersatzstablänge des Obergurtes $\ell_{ef,O}$ und ergibt sich nach Umformen der Gl. 20 zu

$$\ell_{ef,L} = \pi \frac{\sqrt{6EI_z}}{\sqrt{F + \sqrt{F^2 + 12EI_z k}}}. \quad (32)$$

Die Vorkrümmungslänge $\ell_{ef,L}$ des Obergurtes darf auch nicht mit der wirksamen Länge $\ell_{L,ef}$ der Dachlatten nach Gl. 7 verwechselt werden.

Eine Verformungsbegrenzung ist nicht erforderlich, da für $\alpha \rightarrow 1$ die Beanspruchungen über alle Grenzen wachsen und die Konstruktion sehr schnell unwirtschaftlich wird. Ein ausreichender Sicherheitsabstand gegenüber der kritischen Last ist durch die Teilsicherheitsbeiwerte auf der Beanspruchungsseite ohnehin gewährleistet.

Jede Dachlatte ist an jeden Obergurt für die Kraft F_{O-L} nach Gl. 29 zug- und druckfest anzuschließen. Die maximale Normalkraftbeanspruchung der Dachlatte ergibt sich zu

$$N_L = n_O F_{O-L} \text{ mit } n_O \leq 5. \quad (33)$$

Die Dachlatten müssen für

$$F_{L-V} = \left(\frac{n_B}{n_V} - 2 \right) F_{O-L} \quad (34)$$

an jeden Verband angeschlossen werden.

Die Reduzierung um 2 Obergurte darf nur angesetzt werden, wenn die beiden Gurte, die direkt am Verband liegen, mit diesem in horizontaler Richtung durch auszieh feste Verbindungsmittel verbunden sind. In diesem Fall werden die Beanspruchungen direkt in den Verband eingeleitet und beanspruchen nicht die Dachlatten.

4.3 Beanspruchungen des Verbandes

Die maximalen Biegebeanspruchungen des Verbandes ergeben sich mit $k, B, m = 1$ aus einer halbwelligen Vorkrümmung über die gesamte Obergurlänge und damit $e = l/400$ aus Gl. 23 und Gl. 24.

4.4 Einfluss der Verbands- und Bettungssteifigkeit

Da sich in **Bild 6a** die Verbandssteifigkeit aus der Seitenlast q_L mit $m = 1$ ergibt, ist der Verband für kurze Vorkrümmungslängen mit $m \geq 2$ sehr steif. Die Steifigkeit ist im Vergleich zu den Steifigkeiten der Dachlatten und ihrer Verbindungen so groß, dass sie keinen Einfluss mehr auf die Beanspruchungen des Obergurtes und der Dachlatten hat.

Der Einfluss der Bettungssteifigkeit k auf die Beanspruchung $q_L a_L$ der Dachlatten und die Ersatzstablänge l_{ef} des Obergurtes können **Bild 8** entnommen werden. Die Knicklänge des Obergurtes ist deutlich von k abhängig, während die Beanspruchung der Dachlatten fast ausschließlich vom Abstand a_L der Dachlatten abhängig ist.

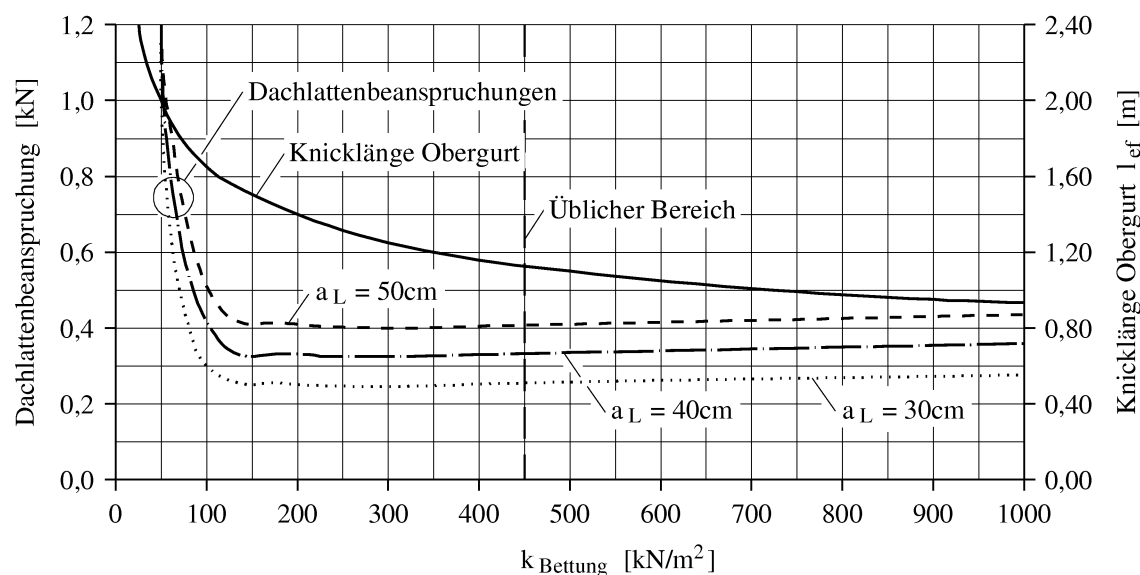


Bild 8: Einfluss der Bettungssteifigkeit

Figure 8: Influence of the bedding stiffness

5 Anforderungen an die Dachlatten

5.1 Nachweis der Verwendbarkeit

Die Übereinstimmung der Eigenschaften der Dachlatten mit den Anforderungen der DIN 4074-1:2008-12 wird durch die visuelle Sortierung der Dachlatten durch den Hersteller erreicht. Die Übereinstimmung wird vom Hersteller durch Kennzeichnung entsprechend der Kennzeichnungsverordnung der Länder erklärt (ÜH). Die Kennzeichnung beinhaltet den Namen des Herstellers (verschlüsselt) und die Sortierklasse.

Dachlatten mit einem Querschnitt bis einschließlich 40 mm x 60 mm werden gebündelt. Maximal sind 10 Dachlatten je Bund zulässig. Mindestens eine Dachlatte je Bund muss gekennzeichnet sein (Hersteller und Sortierklasse). Eine zusätzliche Kennzeichnung jeder Dachlatte erfolgt an der Stirnseite mit der Farbe der jeweiligen Sortierklasse: Dachlatte S 10 = rot, Dachlatte S 13 = blau.

5.2 Beanspruchungen der Dachlatten

Da die Dachlatten hier wesentliche Teile der Aussteifungskonstruktion sind, muss ihre Tragfähigkeit und Gebrauchstauglichkeit in dieser Funktion einschließlich ihrer Verbindungen nachgewiesen werden, auch wenn für sie die im Merkblatt „Dachlatten“ vom Bund Deutscher Zimmermeister im Zentralverband des Deutschen Baugewerbes aufgeführten Querschnitte verwendet werden. Grund hierfür ist, dass für die dort aufgeführten Querschnitte und Stützweiten nur Lasten der Kategorie H berücksichtigt werden. Als aussteifendes Bauteil werden Dachlatten jedoch nicht nur durch die Dacheindeckung auf Biegung, sondern durch die Aussteifungslasten infolge Wind, Erdbeben und Imperfektionen auch auf Druck und Zug beansprucht. Die Verbindungen der Dachlatten mit der Unterkonstruktion und ihre Stöße erhalten dadurch besondere Bedeutung.

5.3 Ausführung der Dachlatten

Die Dachlatten sind in einem gleichmäßigen Abstand, der sich wesentlich aus der Dacheindeckung ergibt, auf den Obergurten angeordnet. Jede Dachlatte ist durch die Konterlatten hindurch mit jedem Obergurt durch Nägel zu verbinden. Da die Verbindung stets durch die Konterlatte hindurch führt, muss diese im Bereich des Anschlusses ebenfalls mit dem Obergurt verbunden werden, um eine verschiebliche Zwischenschicht zu vermeiden. Die Konterlatte ist hierfür mit der gleichen Nagelanzahl im Abstand von 10d neben dem Dachlattenanschluss mit dem Obergurt zu verbinden. Bis zum Anschluss an einen Obergurtverband dürfen insgesamt 5 Binder an eine Dachlatte anschließen, so dass maximal 10 Binder zwischen zwei Verbänden angeordnet werden dürfen. Die Beanspruchung einer Dachlatte steigt von dem am weitesten vom Verband entfernten Binder (Mitte zwischen zwei Verbänden) bis zum Verband treppenförmig an.

Auf Grund der sehr großen Dachlängen müssen die Dachlatten gestoßen werden. Sämtliche Stöße müssen druck- und zugfest hergestellt und dabei vereinfachend für die Kraft N_L nachgewiesen werden. Es wird empfohlen, die Dachlattenstöße in der Mitte zwischen zwei Verbänden außerhalb der maximal beanspruchten Bereiche anzuordnen. Für Stöße außerhalb dieser Bereiche kann dann der Stoß für eine geringere Kraft bemessen werden, die im Einzelfall ermittelt werden muss. Für die Stoßausführung sind ausreichend steife Verbindungen zu wählen. Dieses ist gewährleistet, wenn die Verbindung für die 1,5-fache Beanspruchung ausgelegt wird. Dabei sollten die Stöße versetzt angeordnet werden, um die Tragsicherheit des Daches zu erhöhen.

Die bisherige Ausführung der Stöße der Dachlatten mit rechnerisch nicht nachweisbaren Verbindungen (wegen Nichteinhaltung von Randabständen, Schrägnagelung etc.), auch wenn sie über zwei Felder versetzt angeordnet werden, führt nach *Kessel und Kühl* [3] zu übermäßigen Verformungen und damit Beanspruchungen der Dachlatten und ihrer Verbindungen und zu übermäßigen Verformungen und damit Beanspruchungen der Obergurte. Solche Ausführungen sind danach unzulässig.

5.4 Ausführung einer Dachschalung

Eine aus Brettern hergestellte Dachschalung bewirkt, wie schon die Dachlattung, eine kontinuierliche Stützung der einzelnen Binderobergurte im Sinne einer elastischen Bettung. Die Beanspruchungen der Dachschalung und der Dachlattung als elastische Bettung sind gleich. Die in Gl. 29 bis Gl. 34 angegebenen Beanspruchungen der Anschlüsse und der Stöße gelten auch für die Dachschalung. Genau wie bei einer stützenden Dachlattung ist bei Anordnung einer stützenden Dachschalung ein Obergurterverband als Teil eines Sekundärsystems erforderlich. Hier gilt ebenfalls die Begrenzung auf 10 Binder zwischen zwei Verbänden und maximal 5 auf einer Seite des Verbandes, sofern kein genauere Nachweis geführt wird.

Besondere Beachtung muss den Stößen der Dachschalung geschenkt werden. Das Stoßen der Dachschalung auf den Binderobergurten ist auf Grund der Randabstände der Verbindungsmittel in vielen Fällen nicht möglich. Eine mögliche Konstruktionsvariante sind Beihölzer, die mit ausziehfesten Verbindungsmitteln seitlich mit den Obergurten zu verbinden sind.

6 Beispiel

In diesem Beispiel werden $n_B = 40$ Obergurte mit einer Länge $l = 10,15$ m, einem Querschnitt 6/20 und einer maximalen Normalkraft von $N_{O,max,d} = 68,6$ kN gegen $n_V = 4$ Verbände abgestützt. Einem Verband sind somit 10 Obergurte zugeordnet. Es handelt sich dabei um den in **Bild 5** verwendeten Obergurt. Die Normalkraft setzt sich aus den Anteilen $N_{O,G,k} = 31,0$ kN aus ständiger Last und $N_{O,S,k} = 17,8$ kN aus Schnee zusammen.

Die Dachlatten, mit dem Querschnitt 6/4, lagern auf den Obergurten in einem Abstand von 40 cm auf und werden durch $0,55$ kN/m² aus ständiger Last und $0,68$ kN/m² aus Schnee beansprucht. Die Dachneigung beträgt 20° . Der Abstand der Obergurte beträgt $a_B = 1,25$ m.

6.1 Nachweise der Dachlatten

Für die Dachlatten sind zwei Nachweise erforderlich. Zum einen sind die Dachlatten für die Dachlasten aus ständigen Lasten und Schnee nachzuweisen, zum anderen ist nach Regel (7) des Abschnitts 6.2 der DIN 1055-3:2006-03 ein Nachweis mit zwei in den Viertelpunkten angreifenden Einzellasten von je $0,5$ kN zu führen. Diese Einzellasten sind mit den ständigen Lasten der Dachendeckung zu überlagern.

In diesem Beispiel mögen die Dachlatten den Anforderungen der Festigkeitsklasse C24 und das Umgebungsklima dem der Nutzungsklasse 2 entsprechen.

6.1.1 Beanspruchungen der Dachlatten als Abstütungen

Die Dachlatten werden mit zwei Nägeln $3,1 \times 90$ an jeden Obergurt und mit 4 Nägeln $3,1 \times 90$ (zunächst geschätzt) an jeden Verband angeschlossen. Mit den in Tabelle G.1 der DIN 1052:2008-12 angegebenen Mittelwerten für die Verschiebungsmodul für Verbindungsmittel und dem mittleren E-Modul der Dachlatten ergibt sich die Anschlusssteifigkeit der Verbindung des Obergurtes an die Dachlatte nach Gl. 4

$$K_{O-L,u} = \frac{2}{3} \cdot n_{Vbm} \cdot \frac{K_{ser}}{\gamma_M} = \frac{2}{3} \cdot 2 \cdot \frac{350^{1,5} \cdot 3,1^{0,8}}{25 \cdot 1,3} = 664 \text{ N/mm} \hat{=} 664 \text{ kN/m},$$

die Dachlattenlängssteifigkeit nach Gl. 5

$$K_{L,u} = \frac{E_{0,mean} \cdot A_L}{\gamma_M \cdot l_{L,ef}} = \frac{1100 \cdot 4 \cdot 6}{1,3 \cdot 18,75} = 1083 \text{ kN/m} \quad \text{mit } l_{L,ef} = \frac{5}{2} \cdot (5+1) \cdot 1,25 \text{ m} = 18,75 \text{ m}$$

und die Anschlusssteifigkeit der Verbindung der Dachlatte an den Verband nach Gl. 6

$$K_{L-V,u} = \frac{2}{3} \cdot n_{Vbm} \cdot \frac{K_{ser}}{\gamma_M} \cdot \frac{n_V}{n_B} \cdot \frac{1}{k_{sim}} = \frac{2}{3} \cdot 4 \cdot \frac{350^{1,5} \cdot 3,1^{0,8}}{25 \cdot 1,3} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{0,677} = 196 \text{ N/mm} \hat{=} 196 \text{ kN/m}.$$

Dabei wurde die Anzahl n_B/n_V der auszusteienden Obergurte nach Kessel [5] durch den Beiwert

$$k_{\text{sim}} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{\frac{n_B}{n_V}}} \right) = 0,677 \quad (35)$$

reduziert und damit die Anschlusssteifigkeit erhöht, da nicht alle Obergurte die maximale und gleichgerichtete Vorkrümmung besitzen werden.

Die Bettungssteifigkeit k des maßgebenden Obergurtes ergibt sich nun nach Gl. 3 zu

$$k = \frac{1}{a_L \cdot \left(\frac{1}{K_{O-L,u}} + \frac{1}{(EA)_{L,u}} + \frac{1}{K_{L-V,u}} \right)} = \frac{1}{0,40 \cdot \left(\frac{1}{664} + \frac{1}{1083} + \frac{1}{196} \right)} = 332 \text{ kN/m}^2.$$

Aus der elastischen Bettung k lässt sich die für die Beanspruchungen der Dachlatten maßgebende Vorkrümmungslänge $\ell_{\text{ef.L}}$ des Obergurtes nach Gl. 32 mit

$$E = \frac{E_{0,\text{mean}}}{\gamma_M} = \frac{1100}{1,3} = 846 \text{ kN/cm}^2,$$

$$I_z = \frac{6^3 \cdot 20}{12} = 360 \text{ cm}^4$$

und der maximalen Normalkraft des Obergurtes

$$N_{O,\text{max,d}} = 68,6 \text{ kN}$$

zu

$$\begin{aligned} \ell_{\text{ef.L}} &= \pi \frac{\sqrt{6EI_z}}{\sqrt{N_{O,\text{max,d}} + \sqrt{N_{O,\text{max,d}}^2 + 12EI_z k}}} \\ &= \pi \cdot \frac{\sqrt{6 \cdot 846 \cdot 360}}{\sqrt{68,6 + \sqrt{68,6^2 + 12 \cdot 846 \cdot 360 \cdot 332 \cdot 10^{-4}}}} = 206 \text{ cm} \end{aligned}$$

bestimmen. Da die Teilsicherheitsbeiwerte γ_G , γ_Q und γ_M nicht wesentlich verschieden sind, kann gesagt werden, dass diese Länge nicht wesentlich abhängig von Sicherheiten ist.

Bei der Berechnung der maximalen Beanspruchung der Verbindung Dachlatte an Obergurt wird berücksichtigt, dass es sich bei dem Zusammenwirken von Obergurt und seiner aus einer Vielzahl von Dachlatten bestehenden Stützung um ein Tragwerk aus mehreren Stäben entsprechend Regel (2) des Abschnitts 8.5.1. der DIN 1052:2008-12 handelt. Dann folgt mit den mittleren Steifigkeitskennwerten

$$\alpha = \frac{N_{O,\text{max,d}}}{\frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_z}{\ell_{\text{ef.L}}^2} + \frac{\ell_{\text{ef.L}}^2 \cdot k}{\pi^2}} = \frac{68,6}{\frac{\pi^2 \cdot 846 \cdot 360}{206^2} + \frac{206^2 \cdot 332 \cdot 10^{-4}}{\pi^2}} = 0,32 < 1,0$$

und die Verformung des gebetteten Obergurtes nach Gl. 30

$$v_L = \frac{\ell_{\text{ef,L}}}{400} \cdot \frac{\alpha}{1-\alpha} = \frac{206}{400} \cdot \frac{0,32}{1-0,32} = 0,24 \text{ cm} \leq \frac{\ell_{\text{ef,L}}}{500} = 0,41 \text{ cm}.$$

Die Beanspruchung der Verbindung des einzelnen Obergurtes mit einer Dachlatte ergibt

$$F_{\text{O-L,d}} = k \cdot a_L \cdot v_L = 332 \cdot 10^{-4} \cdot 40 \cdot 0,24 = 0,33 \text{ kN}.$$

Daraus folgt die maximale Beanspruchung der Dachlatte nach Gl. 33

$$N_{\text{L,d}} = n_O \cdot F_{\text{O-L,d}} = 5 \cdot 0,33 \text{ kN} = 1,65 \text{ kN}.$$

Die Dachlattenstöße sind für

$$F_{\text{L,St,d}} = 1,5 \cdot N_{\text{L,d}} = 2,48 \text{ kN}$$

druck- und zugfest z.B. wie in **Bild 9** mit Hilfe von Beihölzern herzustellen.

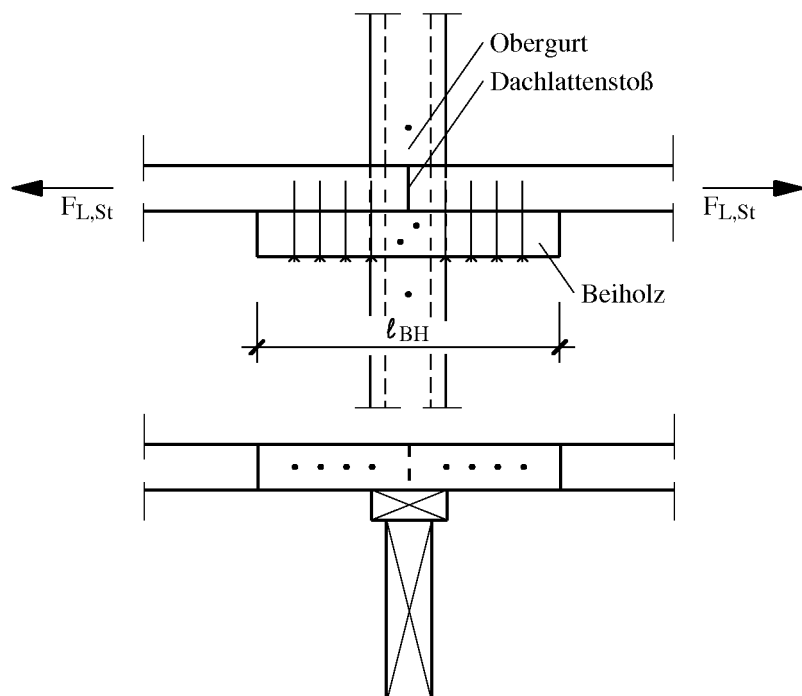


Bild 9: Dachlattenstoß mit Beiholz

Figure 9: Roof batten joint with additional block

Wird der Dachlattenstoß mit Nägel 3,4x100 mit $R_{\text{fa,d}} = 0,626 \text{ kN}$ hergestellt, so sind

$$n_{\text{Nägel}} = \frac{2,48 \text{ kN}}{0,626 \text{ kN}} = 3,9 \Rightarrow 4 \text{ Nägel erforderlich}.$$

Die Beiholzlänge ℓ_{BH} ergibt sich aus den erforderlichen Randabständen zum beanspruchten Hirnholzende (12d) und in Faserrichtung untereinander (10d) zu

$$\ell_{\text{BH}} = 2 \cdot (2 \cdot 12 \cdot 3,4 \text{ mm} + 3 \cdot 10 \cdot 3,4 \text{ mm}) = 367 \text{ mm}.$$

Gewählt wird ein Beiholz 6/4 mit einer Länge von 40 cm.

Die Dachlatten müssen nach Gl. 34 für

$$F_{L-V,d} = 0,677 \cdot (10 - 2) \cdot 0,33 \text{ kN} = 1,79 \text{ kN}$$

an jeden Verband angeschlossenen werden. Bei einer Verbindung durch eine Zwischenschicht mit 3,1 x 90 Nägel mit $R_{la,d} = 0,505 \text{ kN}$ muss jede Dachlatte mit

$$n_{\text{Nägel}} = \frac{0,33 \text{ kN}}{0,505 \text{ kN}} = 0,65 < 2 \text{ Nägel vorhanden}$$

an jeden Obergurt und mit

$$n_{\text{Nägel}} = \frac{1,79 \text{ kN}}{0,505 \text{ kN}} = 3,5 < 4 \text{ Nägel vorhanden}$$

an jeden Verband angeschlossenen werden.

Die vorhandenen Verbindungen mit 2 Nägeln an jedem Anschluss Obergurt an Dachlatte und mit 4 Nägeln an jedem Anschluss der Dachlatten an die Verbände sind also ausreichend.

Eine Verringerung der Nagelanzahl auf dem Obergurt von 2 Nägel auf 1 Nagel wäre möglich. Hierbei ist jedoch **Bild 8** zu beachten. Durch die daraus folgende Verringerung der Bettung bei gleichbleibendem Dachlattenabstand ergeben sich keine größeren Beanspruchungen der Dachlatten und ihrer Verbindungen. Die Beanspruchungen des Obergurtes erhöhen sich dadurch jedoch, da sich die Knick- oder Ersatzstablänge bei sinkender Bettungssteifigkeit erhöht.

Die für den Anschluss der Dachlatten an den Verband benötigten 4 Nägel dürfen auf die beiden direkt mit dem Verband verbundenen Obergurte und die beiden Verbandsgurte verteilt werden. In **Bild 10** sind jeweils 2 Nägel auf den beiden Obergurten angeordnet, die jedoch nur berücksichtigt werden dürfen, wenn der Verband mit Nägeln, die ständig auf Herausziehen beansprucht werden dürfen, an die anliegenden Obergurte angeschlossen ist.

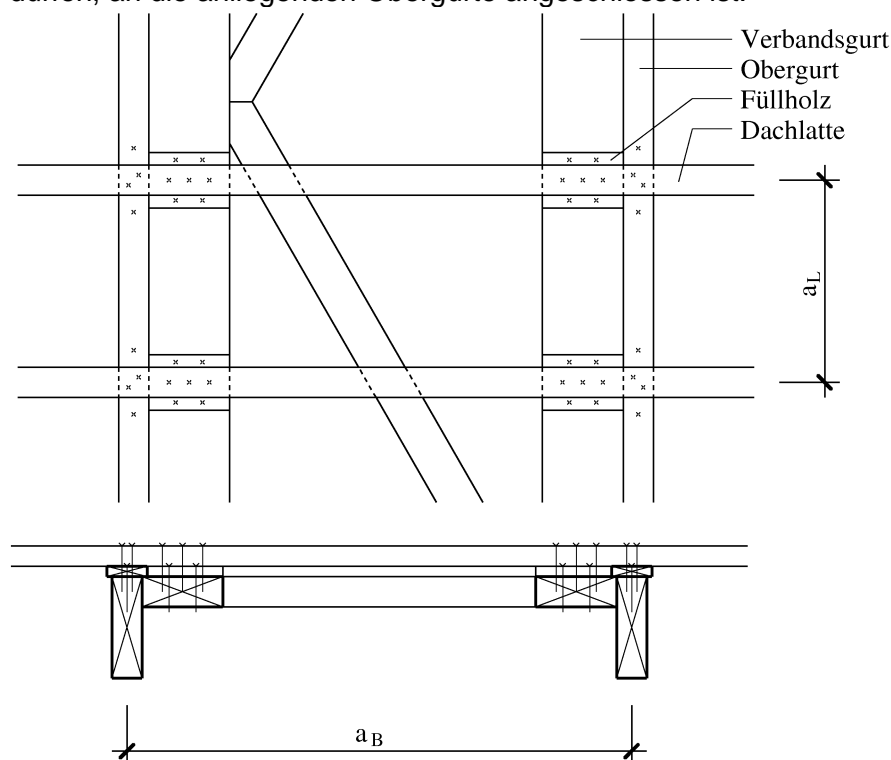


Bild 10: Beispiel: Anschluss der Dachlatten an den Verband

Figure 10: Example: Connection of roof battens to the bracing system

Bei dem in **Bild 10** dargestellten Anschluss der Dachlatten an den Verband beträgt die erforderliche Nagelanzahl $n_{\text{Nägel}}=10$. Es werden hier je 2 Nägel auf den anliegenden Obergurten und 6 Nägel auf den beiden Verbandsgurten angeordnet. In der Ebene der Konterlatte sind Bretter oder Bohlen (Füllholz) auf den Gurten anzuordnen, die für sich mit der gleichen Nagelanzahl an die Gurte des Verbandes anzuschließen sind.

Für den späteren Nachweis der Dachlatten mit Mannlast nach DIN 1055-3:2006-03 sind Beanspruchungen aus ständigen Lasten zu berücksichtigen. Durch die ständigen Lasten ergeben sich ebenfalls Beanspruchungen der Abstützungen, jedoch geringere als oben angegeben. Für diesen Lastfall müssen diese Beanspruchungen neu ermittelt werden. Eine Ermittlung über das Verhältnis der ständigen Lasten zu den Schneelasten ist nicht möglich, da es sich hier um eine Berechnung nach Theorie II. Ordnung handelt.

Für die ständigen Lasten ergibt sich mit

$$N_{\text{O,G,d}} = 1,35 \cdot 31,0 \text{ kN} = 41,9 \text{ kN}$$

die Vorkrümmungslänge

$$\begin{aligned} \ell_{\text{ef,L}} &= \pi \frac{\sqrt{6EI_z}}{\sqrt{N_{\text{O,G,d}} + \sqrt{N_{\text{O,G,d}}^2 + 12EI_z k}}} \\ &= \pi \cdot \frac{\sqrt{6 \cdot 846 \cdot 360}}{\sqrt{41,9 + \sqrt{41,9^2 + 12 \cdot 846 \cdot 360 \cdot 332 \cdot 10^{-4}}}} = 214 \text{ cm}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{N_{\text{O,G,d}}}{\frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_z}{\ell_{\text{ef,L}}^2} + \frac{\ell_{\text{ef,L}}^2 \cdot k}{\pi^2}} \\ &= \frac{41,9}{\frac{\pi^2 \cdot 846 \cdot 360}{214^2} + \frac{214^2 \cdot 332 \cdot 10^{-4}}{\pi^2}} = 0,19 < 1,0 \end{aligned}$$

und schließlich die Obergurtverformung zu

$$v_L = \frac{\ell_{\text{ef,L}}}{400} \cdot \frac{\alpha}{1-\alpha} = \frac{214}{400} \cdot \frac{0,19}{1-0,19} = 0,125 \text{ cm}.$$

Aus der Beanspruchung der Verbindung Obergurt an Dachlatte

$$F_{\text{O-L,d}} = k \cdot a_L \cdot v_L = 332 \cdot 10^{-4} \cdot 40 \cdot 0,125 = 0,17 \text{ kN}$$

ergibt sich die Normalkraftbeanspruchung der Dachlatten unter ständigen Lasten

$$N_{\text{L,d}} = n_{\text{O}} \cdot F_{\text{O-L,d}} = 5 \cdot 0,17 \text{ kN} = 0,85 \text{ kN}.$$

6.1.2 Nachweise der Dachlatten für Dachlasten

Dachlatten werden i.d.R. als Mehrfeldträger ausgeführt, mindestens jedoch als Zweifeldträger. Folgende Lasten nach DIN 1055 wirken auf sie ein:

Ständige Lasten aus Dachhaut	$g_k = 0,55 \text{ kN/m}^2$
Schnee, Zone 2, $h < 285 \text{ m ü. d. M.}$, $DN = 20^\circ$	$s_k = 0,68 \text{ kN/m}^2$
Normalkraft als Abstützung	$N_d = 1,65 \text{ kN}$

Daraus ergeben sich schließlich die Bemessungswerte der Einwirkungen

$$N_d = \pm 1,65 \text{ kN},$$

$$q_d = 1,35 \cdot 0,55 + 1,5 \cdot 0,68 \cdot \cos 20^\circ = 1,70 \text{ kN/m}^2$$

und für die einzelne Dachlatte

$$q_{d,0} = 1,70 \text{ kN/m}^2 \cdot 0,40 \text{ m} = 0,68 \text{ kN/m},$$

$$q_{y,d} = 0,68 \text{ kN/m} \cdot \sin 20^\circ = 0,23 \text{ kN/m},$$

$$q_{z,d} = 0,68 \text{ kN/m} \cdot \cos 20^\circ = 0,64 \text{ kN/m}.$$

Für den Zweifeldträger unter einer konstanten Linienlast in beiden Feldern ergeben sich die Beanspruchungen für das Feld zu

$$N_d = \pm 1,65 \text{ kN},$$

$$M_{y,d} = 0,07 \cdot q_{z,d} \cdot \ell^2 = 0,07 \text{ kNm} \hat{=} 7,0 \text{ kNcm},$$

$$M_{z,d} = 0,07 \cdot q_{y,d} \cdot \ell^2 = 0,03 \text{ kNm} \hat{=} 2,5 \text{ kNcm}$$

und über dem mittleren Auflager zu

$$N_d = \pm 1,65 \text{ kN},$$

$$M_{y,d} = 0,125 \cdot q_{z,d} \cdot \ell^2 = 0,13 \text{ kNm} \hat{=} 12,5 \text{ kNcm},$$

$$M_{z,d} = 0,125 \cdot q_{y,d} \cdot \ell^2 = 0,05 \text{ kNm} \hat{=} 4,5 \text{ kNcm}.$$

Für die Nachweise mit Druck sind die Knick- oder Ersatzstablängen für das Feld und den Stützbe-
reich erforderlich, die sich aus den Nullstellen der Momentenlinie ergeben. Sie beträgt im Feld

$$l_{\text{ef,Feld}} = \frac{6}{8} \ell \tag{36}$$

und über der Stütze

$$l_{\text{ef,Stütz}} = \frac{1}{2} \ell. \tag{37}$$

Aus den Knicklängen und dem Dachlattenquerschnitt nach Abschnitt 6 ergeben sich die Schlankheiten und Knickbeiwerte nach Regel (64) im Abschnitt 12.3.1 der DIN 1052:2008-12, die in Tabelle 1 aufgelistet sind.

Tabelle 1: Schlankheiten und Knickbeiwerte

	Feld	Stütze
λ_y	$\frac{6}{8} \cdot \frac{125}{4} \cdot \sqrt{12} = 81,2$	$\frac{1}{2} \cdot \frac{125}{4} \cdot \sqrt{12} = 54,1$
$k_{c,y}$	0,425	0,746
λ_z	$\frac{6}{8} \cdot \frac{125}{6} \cdot \sqrt{12} = 54,1$	$\frac{1}{2} \cdot \frac{125}{6} \cdot \sqrt{12} = 36,1$
$k_{c,z}$	0,746	0,912

Für die kurzzeitige Einwirkungskombination ergeben sich die Bemessungswerte der Festigkeiten nach Tabelle F.5 der DIN 1052:2008-12 für C24 mit $k_{mod} = 0,9$:

$$f_{c,0,d} = 1,45 \text{ kN/cm}^2, f_{t,0,d} = 0,97 \text{ kN/cm}^2, f_{m,d} = 1,66 \text{ kN/cm}^2, f_{v,d} = 0,138 \text{ kN/cm}^2.$$

Für das Feld und den Stützbereich sind mit den oben ermittelten Beanspruchungen und Beanspruchbarkeiten die Nachweise für Druck nach den Regeln (71) und (72) im Abschnitt 10.3.3 und für Zug nach den Regeln (73) und (74) im Abschnitt 10.3.4 der DIN 1052:2008-12 zu führen.

In diesem Fall ist der Bereich über der Mittelstütze unter Zugbeanspruchungen maßgebend:

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{\sigma_{t,0,d}}{f_{t,0,d}} + \frac{\sigma_{m,y,d}}{f_{m,d}} + k_{red} \cdot \frac{\sigma_{m,z,d}}{f_{m,d}} \leq 1,0 \\ &= \frac{1,65 \text{ kN}}{4 \cdot 6 \text{ cm}^2} \cdot \frac{1}{0,97 \text{ kN/cm}^2} + \frac{12,5 \text{ kNcm} \cdot 6}{6 \cdot 4^2 \text{ cm}^3} \cdot \frac{1}{1,66 \text{ kN/cm}^2} + 0,7 \cdot \frac{4,5 \text{ kNcm} \cdot 6}{6^2 \cdot 4 \text{ cm}^3} \cdot \frac{1}{1,66 \text{ kN/cm}^2} \\ &= 0,07 + 0,47 + 0,08 = 0,62 \leq 1,0. \end{aligned}$$

6.1.3 Nachweise der Dachlatten für Mannlast

Die Dachlatten werden durch folgende Lasten nach DIN 1055 beansprucht:

Ständige Lasten aus Dachhaut	$g_k = 0,55 \text{ kN/m}^2$,
Normalkraft als Abstützung nach Abschnitt 6.1.1	$N_d = 0,85 \text{ kN}$,
Einzellasten in den Viertelpunkten eines Feldes	$F_k = 0,5 \text{ kN}$.

Daraus ergeben sich schließlich die Bemessungswerte der Einwirkungen

$$\begin{aligned} N_d &= \pm 0,85 \text{ kN}, \\ q_d &= 1,35 \cdot 0,55 = 0,74 \text{ kN/m}^2, \\ F_d &= 1,5 \cdot 0,5 = 0,75 \text{ kN} \end{aligned}$$

und für die einzelne Dachlatte

$$\begin{aligned} q_d &= 0,74 \text{ kN/m}^2 \cdot 0,40 \text{ m} = 0,30 \text{ kN/m}, \\ q_{y,d} &= 0,30 \text{ kN/m} \cdot \sin 20^\circ = 0,10 \text{ kN/m}, \\ q_{z,d} &= 0,30 \text{ kN/m} \cdot \cos 20^\circ = 0,28 \text{ kN/m}, \end{aligned}$$

$$F_{y,d} = 0,75 \text{ kN} \cdot \sin 20^\circ = 0,26 \text{ kN},$$

$$F_{z,d} = 0,75 \text{ kN} \cdot \cos 20^\circ = 0,70 \text{ kN}.$$

Für den Zweifeldträger unter einer konstanten Linienlast in beiden Feldern und den in den Viertelpunkten angeordneten Einzellasten in einem Feld ergeben sich die maximalen Feldmomente in dem Bereich zwischen den beiden Einzellasten. Die Stelle ist abhängig von der Größe der Linienlast q_d .

Die Querkraft an der Stelle $\ell/4$ nach der Einzellast ermittelt sich zu

$$V(\ell/4) = \frac{1}{8} q \ell - \frac{9}{64} F. \quad (38)$$

Wenn die Querkraft $V < 0$ ist, ist die Stelle des maximalen Momentes bei $\ell/4$ und es gilt

$$M(\ell/4) = \frac{1}{16} q \ell^2 + \frac{55}{256} F \ell. \quad (39)$$

Wenn die Querkraft $V > 0$ ist, befindet sich das maximale Moment zwischen den beiden Einzellasten F an der Stelle

$$x_0 = \frac{\ell}{4} + \frac{1}{8} \frac{q \ell + \frac{9}{8} F}{q}. \quad (40)$$

Das maximale Moment ergibt sich dann zu

$$M(x_0) = \frac{9}{128} q \ell^2 + \frac{101}{512} F \ell + \frac{81}{8192} \frac{F^2}{q}. \quad (41)$$

Die Querkraft an der Stelle $\ell/4$ beträgt in diesem Beispiel

$$V(\ell/4) = \frac{1}{8} \cdot 0,30 \text{ kN/m} \cdot 1,25 \text{ m} - \frac{9}{64} \cdot 0,75 \text{ kN} = -0,14 \text{ kN}.$$

Für die maximalen Feldmomente folgt somit

$$M_{y,d} = \frac{1}{16} \cdot q_{z,d} \cdot \ell^2 + \frac{55}{256} \cdot F_{z,d} \cdot \ell = 0,22 \text{ kNm} \hat{=} 21,5 \text{ kNcm},$$

$$M_{z,d} = \frac{1}{16} \cdot q_{y,d} \cdot \ell^2 + \frac{55}{256} \cdot F_{y,d} \cdot \ell = 0,08 \text{ kNm} \hat{=} 8,0 \text{ kNcm}$$

und für die Stützmente

$$M_{y,d} = \frac{1}{8} \cdot q_{z,d} \cdot \ell^2 + \frac{9}{64} \cdot F_{z,d} \cdot \ell = 0,18 \text{ kNm} \hat{=} 17,8 \text{ kNcm},$$

$$M_{z,d} = \frac{1}{8} \cdot q_{y,d} \cdot \ell^2 + \frac{9}{64} \cdot F_{y,d} \cdot \ell = 0,07 \text{ kNm} \hat{=} 6,5 \text{ kNcm}.$$

Für die Nachweise mit Druck ergeben sich die Knick- oder Ersatzstablängen aus den Nullstellen der Momentenlinie. Für das Feld gilt

$$l_{\text{ef,Feld}} = \frac{3}{8} \ell - \frac{73 F}{64 q} + \sqrt{\left(\frac{3}{8} \ell - \frac{73 F}{64 q}\right)^2 + 2 \frac{F}{q} \ell} = 1,07 \text{ m} \quad (42)$$

und über der Stütze

$$l_{\text{ef,Stütz}} = 2 \left(\ell - l_{\text{ef,Feld}} \right) = 0,36 \text{ m}.$$

Tabelle 2: Schlankheiten und Knickbeiwerte

	Feld	Stütze
λ_y	$\frac{107}{4} \cdot \sqrt{12} = 92,7$	$\frac{36}{4} \cdot \sqrt{12} = 31,2$
$k_{c,y}$	0,346	0,942
λ_z	$\frac{107}{6} \cdot \sqrt{12} = 61,8$	$\frac{36}{6} \cdot \sqrt{12} = 20,8$
$k_{c,z}$	0,650	0,988

In diesem Fall ist das Feld, in dem die Mannlast angreift, unter Druckbeanspruchungen maßgebend:

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{\sigma_{c,0,d}}{k_{c,y} \cdot f_{c,0,d}} + \frac{\sigma_{m,y,d}}{f_{m,d}} + k_{\text{red}} \cdot \frac{\sigma_{m,z,d}}{f_{m,d}} \leq 1,0 \\ &= \frac{0,85 \text{ kN}}{4 \cdot 6 \text{ cm}^2} \cdot \frac{1}{0,346 \cdot 1,45 \text{ kN/cm}^2} + \frac{21,5 \text{ kNcm} \cdot 6}{6 \cdot 4^2 \text{ cm}^3} \cdot \frac{1}{1,66 \text{ kN/cm}^2} + 0,7 \cdot \frac{8,0 \text{ kNcm} \cdot 6}{6^2 \cdot 4 \text{ cm}^3} \cdot \frac{1}{1,66 \text{ kN/cm}^2} \\ &= 0,07 + 0,81 + 0,14 = 1,02 \approx 1,0 \end{aligned}$$

6.2 Nachweis der Obergurte

Für den Nachweis der Obergurte sind zwei Nachweise zu führen. Zum einen ist der Obergurt für Beanspruchungen in der Ebene des Fachwerträgers nachzuweisen, zum anderen ergeben sich Biegebeanspruchungen rechtwinklig zu dieser Ebene, für die diese nachzuweisen sind. Im Folgenden werden nur die Nachweise rechtwinklig zur Fachwerkebene geführt.

Zur Ermittlung der Biegebeanspruchungen oder zum Führen eines Knicknachweises nach dem Ersatzstabverfahren muss zunächst die Knick- bzw. Ersatzstablänge des Obergurtes ermittelt werden. Diese ist abhängig von der Eigenbiegesteifigkeit des einzelnen Obergurtes EI_z und der Bettungsziffer k durch die Dachlatten nach Abschnitt 6.1.1.

Die Knicklänge beträgt in diesem Beispiel mit

$$E = \frac{E_{0,\text{mean}}}{\gamma_M} = \frac{1100}{1,3} = 846 \text{ kN/cm}^2, \quad I_z = \frac{6^3 \cdot 20}{12} = 360 \text{ cm}^4$$

$$l_{\text{ef,O,z}} = \pi \cdot \sqrt[4]{\frac{846 \cdot 360}{4 \cdot 332 \cdot 10^{-4}}} = 122 \text{ cm} \hat{=} 1,22 \text{ m} \gg 0,40 \text{ m}.$$

Damit ergibt sich der Knickbeiwert $k_{c,z} = 0,545$ nach Regel (64) im Abschnitt 12.3.1 der DIN 1052:2008-12. Das maximale Biegemoment in der Ebene des Fachwerkträgers im Bereich der maximalen Normalkraft beträgt hier 2,00 kNm. Die maximale Normalkraft beträgt in diesem Bereich $N_{O,max,d} = 68,6$ kN.

Für die Auslastung des Obergurtes folgt damit nach dem k_c -Verfahren nach Regel (72) im Abschnitt 10.3.3. der DIN 1052:2008-12

$$\eta = \frac{\sigma_{c,0,d}}{k_{c,z} \cdot f_{c,0,d}} + k_{red} \cdot \frac{\sigma_{m,y,d}}{f_{m,d}} \leq 1,0,$$

$$\eta = \frac{68,6 \text{ kN}}{6 \cdot 20 \text{ cm}^2} \cdot \frac{1}{0,545 \cdot 1,45 \text{ kN/cm}^2} + 0,7 \cdot \frac{200 \text{ kNcm} \cdot 6}{6 \cdot 20^2 \text{ cm}^3} \cdot \frac{1}{1,66 \text{ kN/cm}^2} = 0,72 + 0,21 = 0,93 \leq 1,0.$$

Das maximale Biegemoment $M_{z,d}$ des Obergurtes nach Theorie II. Ordnung mit der in Regel (2) des Abschnitts 8.5.2 der DIN 1052:2008-12 angegebenen Vorkrümmung von $\ell_{ef,O} / 400$ berechnet sich mit der kritischen Last mit

$$E_{0,05} = \frac{2}{3} \cdot E_{0,mean} = \frac{2}{3} \cdot 1100 \text{ kN/cm}^2 = 733 \text{ kN/cm}^2$$

nach Gl. 22

$$F_{crit} = 2 \cdot \sqrt{\frac{E_{0,05}}{\gamma_M} \cdot I_z \cdot k} = 2 \cdot \sqrt{\frac{733}{1,3} \cdot 360 \cdot 332 \cdot 10^{-4}} = 165 \text{ kN}$$

und

$$\alpha = \frac{N_{O,max,d}}{F_{crit}} = \frac{68,6 \text{ kN}}{165 \text{ kN}} = 0,416 < 1,0$$

zu

$$M_{z,d}^{II} = N_{O,max,d} \cdot \frac{\ell_{ef,O,z}}{400} \cdot \left(\frac{1}{1-\alpha} \right) = 68,6 \text{ kN} \cdot \frac{1,22 \text{ m}}{400} \cdot \left(\frac{1}{1-0,416} \right) = 0,358 \text{ kNm} \hat{=} 35,8 \text{ kNcm}.$$

Für die Querschnittstragfähigkeit gelten die Regeln (57) und (58) im Abschnitt 10.2.8. der DIN 1052:2008-12

$$\eta = \left(\frac{\sigma_{c,0,d}}{f_{c,0,d}} \right)^2 + \frac{\sigma_{m,y,d}}{f_{m,d}} + k_{red} \cdot \frac{\sigma_{m,z,d}^{II}}{f_{m,d}} \leq 1,0$$

$$= \left(\frac{68,6 \text{ kN}}{6 \cdot 20 \text{ cm}^2 \cdot 1,45 \text{ kN/cm}^2} \right)^2 + \frac{200 \text{ kNcm} \cdot 6}{6 \cdot 20^2 \text{ cm}^3 \cdot 1,66 \text{ kN/cm}^2} + 0,7 \cdot \frac{35,8 \text{ kNcm} \cdot 6}{6^2 \cdot 20 \text{ cm}^3 \cdot 1,66 \text{ kN/cm}^2}$$

$$= 0,16 + 0,30 + 0,13 = 0,59 \leq 1,0$$

und

$$\begin{aligned} \eta &= \left(\frac{\sigma_{c,0,d}}{f_{c,0,d}} \right)^2 + k_{\text{red}} \cdot \frac{\sigma_{m,y,d}}{f_{m,d}} + \frac{\sigma_{m,z,d}^{\text{II}}}{f_{m,d}} \leq 1,0 \\ &= \left(\frac{68,6 \text{ kN}}{6 \cdot 20 \text{ cm}^2 \cdot 1,45 \text{ kN/cm}^2} \right)^2 + 0,7 \cdot \frac{200 \text{ kNm} \cdot 6}{6 \cdot 20^2 \text{ cm}^3 \cdot 1,66 \text{ kN/cm}^2} + \frac{35,8 \text{ kNm} \cdot 6}{6^2 \cdot 20 \text{ cm}^3 \cdot 1,66 \text{ kN/cm}^2} \\ &= 0,16 + 0,21 + 0,18 = 0,55 \leq 1,0. \end{aligned}$$

Eine Erklärung des recht großen Unterschiedes zwischen dem k_c – Verfahren und der Berechnung nach Theorie II. Ordnung kann bei *Kessel, Schönhoff, Hörsting* [2] nachgelesen werden.

Der bisherige Ansatz einer Ersatzstab- bzw. Knicklänge gleich dem Dachlattenabstand von 40 cm ist nicht gerechtfertigt. Zur Begründung kann u.a. darauf verwiesen werden, dass die vorhandene mittlere Steifigkeit $K_{u,\text{mean}}$ der einzelnen Abstützung (Dachlatte)

$$K_{u,\text{mean}} = \gamma_M \cdot k \cdot a_L = 1,3 \cdot 332 \text{ kN/m}^2 \cdot 0,40 \text{ m} = 173 \text{ kN/m} \hat{=} 1,73 \text{ kN/cm}$$

um ein Vielfaches kleiner ist als die Mindeststeifigkeit nach Regel (5) im Abschnitt 8.4.2 der DIN 1052:2008-12

$$K_{u,\text{mean,req}} = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot 1100 \text{ kN/cm}^2 \cdot 360 \text{ cm}^4}{(40 \text{ cm})^3} = 244 \text{ kN/cm}.$$

Dabei ist noch erschwerend zu berücksichtigen, dass sich diese Mindeststeifigkeit nur auf die kritische Last und nicht auf eine Begrenzung der Verformung bezieht.

Danksagung

Die in diesem Beitrag vorgestellten Untersuchungen wurden durch GIN – Gütegemeinschaft Nagelplattenprodukte e.V. Interessenverband Nagelplatten e.V. finanziell unterstützt.

Literatur

- [1] Natterer, J.; Kessel, M.H.: Theoretische und experimentelle Untersuchungen zur seitlichen Stabilität von Biegeträgern – Forschungsbericht KFWF Nr. 1075, ETH Lausanne 1985
- [2] Kessel, M.H.; Schönhoff T.; Hörsting P.: Zum Nachweis von druckbeanspruchten Bauteilen nach DIN 1052:2004-08 – bauen mit Holz 12/2005, S. 88 – 96
- [3] Kessel, M.H.; Kühl, A.: Zur Tragfähigkeit von Holzkonstruktionen in Nagelplattenbauart: Aussteifung von Druckstäben durch Latten – Ingenieurbüro kgs Hildesheim, Gutachten 001/08 im Auftrag der GIN 2008
- [4] Kessel, M.H.; Kühl, A.: Aussteifung von Nagelplattenkonstruktionen. Band 24 der Reihe Wissenschaft, Fraunhofer IRB Verlag, Stuttgart 2011
- [5] Kessel, M.H.: Imperfektionen von satteldachförmigen Fachwerkträgern aus Holz. Bauingenieur 87 (2012) 277-287