

Räumliches Tragverhalten mehrgeschossiger Gebäude in Holztafelbauart

M. H. Kessel, T. zur Kammer

Zusammenfassung Räumliche Tragmodelle mehrgeschossiger Gebäude in Holztafelbauart, die zur Bestimmung der Beanspruchung der Bauteile tauglich sind, sind auf Grund der Vielzahl von Wänden eines Geschosses statisch vielfach redundant. Daher haben die Steifigkeiten der Bauteile und ihrer Verbindungen einen nicht vernachlässigbaren Einfluss auf die Größe ihrer Beanspruchungen. Von besonderer Bedeutung sind die Beanspruchungen horizontaler Rippen auf Querdruck und der Zugverbindungen vertikaler Rippen. Darüber hinaus kann durch die Berücksichtigung von Lastumlagerungen infolge Duktilität der Verbindungen die Tragfähigkeit besser abgeschätzt werden. Durch die Erweiterung eines einfachen zweidimensionalen Rechenverfahrens wird eine Methode zur Berücksichtigung dieses Einflusses vorgestellt und der Einfluss von vertikalen Einwirkungen auf die horizontale Lastverteilung gezeigt. Die Methode wird anhand eines einfachen Beispiels erläutert.

Three-dimensional load-bearing behaviour of multi-storey timber frame buildings

Abstract Three-dimensional load-bearing models of multi-storey timber frame buildings, which are suitable to determine the loads of the structural members, are multiple redundant because of the high number of walls in one storey. Thus, to define these loads the stiffness of the structural members and their connections can not be neglected. Very important aspects are the forces perpendicular to grain for the horizontal members and the tension joints for the vertical members. Beyond that the consideration of load-rearrangements resulting from the ductility of the connections gives a better estimation of the load capacity. To consider this influence a method based on the extension of a simple two-dimensional calculation method will be presented. This method that also shows the effect of the vertical loads on the horizontal load distribution will be illustrated by an example.

1 Einleitung

Zum räumlichen Tragverhalten von mehrgeschossigen Gebäuden in Holztafelbauart liegen bislang keine hinreichend genauen und gleichzeitig einfachen Tragmodelle vor. Weder durch die aus dem Stahlbetonbau noch aus dem Holzbau bekannten Rechenverfahren kann das räumliche Tragverhalten bei horizontalen Einwirkungen zufriedenstellend abgeschätzt werden.

Die Verfahren des Stahlbetonbaus führen das Aussteifungssystem eines Gebäudes auf einen dünnwandigen, auf Biegung und Torsion beanspruchten Stab mit isotropem Material zurück. Sie sind für Betrachtungen im mehrgeschossigen Holzbau nicht geeignet, da die Verformungen von Holztafeln infolge ihrer Scheibenbeanspruchung, die sich aus der Summe der Verformungen der Rippen (Normalkraftbeanspruchung), der Beplankung (Schubbeanspruchung), des Verbundes von Rippen und Beplankung (Beanspruchung der Verbindungsmittel auf Abscheren) und der Verbindungen mit den übrigen Teilen des Tragwerks (Querdruck-, Zug- oder Schubbeanspruchung) ergeben, einen wesentlichen Einfluss auf die Verteilung der Beanspruchungen haben. Aufbauend besonders auf der Arbeit von v. Halász und Tantow [1], entwickelten Cziesielski [2] und später Steinmetz [3] vereinfachte Tragwerksmodelle für den Holzbau. Rosman [4], Heinisuo [5], Schmidt und Moody [6] und später Kessel [7] zeigen, dass sich diese ingenieurmäßig hergeleiteten Verfahren mit Hilfe der Energiemethoden verallgemeinern und unabhängig von der Anzahl und der Richtung der Wände stets auf die Lösung eines Systems von 3 algebraischen Gleichungen

$$\mathbf{C} \mathbf{u}_D - \mathbf{F}^D = 0 \quad (1)$$

zurückführen lassen. Darin ist \mathbf{C} die einem Geschoss zugehörige 3×3 Steifigkeitsmatrix, die von der Lage der Wände im Grundriss, ihrer Konstruktion, den Materialsteifigkeiten und den Abmessungen abhängig ist. $\mathbf{u}_D = (u_{Dx}, u_{Dy}, \varphi)$ ist dessen zweidimensionales Verschiebungsfeld und $\mathbf{F}^D = (F_x^D, F_y^D, M_z^D)$ ein ebenes, horizontales Kräftesystem bezogen auf den Referenzpunkt D. Da diese Verfahren alle gemeinsam haben, dass sie das Tragverhalten des räumlichen Tragwerks auf ein ebenes Problem reduzieren, werden sie des weiteren als 2D-Modelle bezeichnet. Diese 2D-Modelle sind zumindest für die Betrachtung mehrgeschossiger Holztafelbauten nicht geeignet, da u. a. durch die relativ geringe Querdrucksteifigkeit des Holzes und der im Vergleich zur Längssteifigkeit des Holzes geringeren Steifigkeit von Zuganschlüssen insbesondere die Lagerung der Holztafeln nicht als starr angenommen werden können.

Der Einfluss vertikaler Einwirkungen bei Berücksichtigung von nicht starren Verbindungen und Lagerungen auf das Tragverhalten eines Geschosses wurde erstmals von Kessel und Drücker [8] und später von Kessel und Dettmann [9] gezeigt. Zur Beschreibung des Tragwerks verwendeten sie ein räumliches Stabwerk, ein 3D-Modell, in dem sie für die einzelnen Holztafeln ebene Fachwerkmodelle benutzten und die Lagerungen entsprechend ihrer Steifigkeit simulierten. Anhand eines solchen 3D-Modells wird im Rahmen dieses Beitrags gezeigt, dass es bei den im mehrgeschossigen Holztafelbau auftretenden großen vertikalen Zug- und

Prof. Dr.-Ing. Martin H. Kessel

Leiter des Instituts für Baukonstruktion und Holzbau, TU Braunschweig, Schleinitzstr. 21a, 38100 Braunschweig, E-Mail: m.kessel@tu-bs.de

Dipl.-Ing. Thorsten zur Kammer

Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Baukonstruktion und Holzbau, TU Braunschweig, E-Mail: t.kammer@tu-bs.de

Tabelle 1. Verteilung der horizontalen Lagerkräfte unter Berücksichtigung der Steifigkeit der Zugverankerung und von vertikalen Einwirkungen

Table 1. Horizontal load distribution considering the stiffness of tie-downs and vertical loads

	Modell 1a		Modell 1b		Modell 1c		Modell 1d	
	Horizontalkraft FEM [kN]	2D-Modell [kN]	Horizontalkraft FEM [kN]	Veränderung zu 2D-Modell [%]	Horizontalkraft FEM [kN]	Veränderung zu 2D-Modell [%]	Horizontalkraft FEM [kN]	Veränderung zu 2D-Modell [%]
Wand 1	3,8	3,8	3,8	0	4,6	21	6,1	61
Wand 2	3,3	3,3	3,3	0	3,1	-6	2,6	-21
Wand 3	0,9	0,9	0,9	0	0,9	0	0,9	0
Wand 4	4,0	4,0	4,0	0	3,4	-15	2,4	-40
Wand 5	1,3	1,3	1,3	0	1,3	0	1,3	0

Druckbeanspruchungen aus darüber liegenden Geschossen zu einer falschen Interpretation des Tragverhaltens des Gebäudes kommen kann, wenn lediglich die 2D-Modelle für den Holzbau verwendet werden.

Das 3D-Modell würde es grundsätzlich ermöglichen, das Tragverhalten auch mehrgeschossiger Gebäude zu untersuchen. Der Aufwand einer solchen Untersuchung wäre jedoch allenfalls für Sonderbauwerke vertretbar. Außerdem setzt die Interpretation der Ergebnisse solcher komplexen Strukturen voraus, dass das Tragverhalten des Gebäudes im wesentlichen bekannt ist. Im Folgenden wird gezeigt, wie sich das 2D-Modell so erweitern lässt, dass die Einflüsse der Steifigkeiten und der ständigen vertikalen Kräfte mit überschaubarem Aufwand berücksichtigt werden können.

2 Horizontale Lastverteilung unter Berücksichtigung der vertikalen Einwirkungen am 3D-Modell

Der Einfluss von vertikalen Einwirkungen auf das räumliche Tragverhalten eines Gebäudes in Holztafelbauart wird hier beispielhaft an dem in Bild 1 dargestellten vereinfachten FE-Modell eines einzelnen Geschosses mit der Höhe $h = 2,90$ m und einer Seitenlänge von $7 \times 1,25$ m = $8,75$ m gezeigt. In diesem Rechenmodell werden die einzelnen Wandtafeln als Fachwerke simuliert. Die horizontale Steifigkeit der starr gelagerten Wandtafeln ergibt sich aus der Steifigkeit der Diagonalen und ist so gewählt, dass die einzelne Wandtafel bei einer Horizontalbeanspruchung von 8 kN eine horizontale Verschiebung der Kopfrippe von $h/500$ erfährt. Die Randrippen der Wandtafel, die Deckentafel und die horizontale

Verbindung der Wandtafeln mit der Deckentafel werden als starr angenommen. Das Modell ist in Kessel und Dettmann [9] näher beschrieben.

Die Vorzeichendefinitionen können ebenfalls Bild 1 entnommen werden:

- Die Einwirkungen (actio) F_x , F_y , und F_z sind positiv, wenn sie in Richtung des Koordinatensystems wirken.
- Die Lagerkräfte (reactio) H_i und V_s sind positiv, wenn sie entgegen den positiven Koordinatenrichtungen wirken.

Zu diesem oben beschriebenen und in Bild 1 dargestellten FE-Modell gehören die in Tabelle 1 in der Spalte „Modell 1a“ angegebenen Ergebnisse infolge der horizontalen Einwirkung $F_y = 12$ kN. Die aus der räumlichen FE-Analyse resultierende Verteilung der horizontalen Einwirkungen auf die einzelnen Wandtafeln entspricht der Verteilung bei Anwendung der erwähnten 2D-Modelle. Vertikale Einwirkungen haben wegen der starren Verbindungen bei diesen beiden Rechenmodellen keinen Einfluss auf die Verteilung der horizontalen Lagerkräfte.

Im Modell 1b wurde anstelle der starren Lagerung die Steifigkeit der Zuganschlüsse mit einer Federsteifigkeit $K_t = 5$ kN/mm berücksichtigt. Dies hat auf die Verteilung der horizontalen Lagerkräfte in diesem Beispiel keinen Einfluss, da alle Wände die gleiche Länge ℓ haben. Wird, wie im Modell 1c angenommen, die Wand 1 an der Luvseite zusätzlich durch eine vertikale Einzellast von $F_{z,s,55} = -5$ kN (Druck) beansprucht, erhöht sich die horizontale Beanspruchung der Wand 1 um über 20%. Erhöht sich die vertikale Einwirkung auf $F_{z,s,55} = -15$ kN (Modell 1d) kommt es zu einer Erhöhung der horizontalen Beanspruchung von über 60% gegenüber dem 2D-Modell.

Wenn die Steifigkeit der Wände und ihrer Verbindungen und die vertikalen Beanspruchungen schon bei einem einzelnen Geschoss einen derartig großen Einfluss haben, dann ist zu erwarten, dass das Tragverhalten eines mehrgeschossigen Gebäudes in Holztafelbauart mit den derzeitigen Verfahren nicht abgebildet und somit kein auf die Wirtschaftlichkeit und Sicherheit abgestimmter Ausnutzungsgrad gewährleistet werden kann, da sich für das räumliche Gesamttragwerk ein nichtlineares Tragverhalten einstellt, so dass gilt

$$E(G \oplus Q) \neq E(G) \oplus E(Q). \tag{2}$$

Als Ergebnis der Bemessung eines mehrgeschossigen Gebäudes in Kessel [10] sind drei wesentliche Erkenntnisse zu nennen, die die Notwendigkeit des im folgenden vorgestellten Berechnungsverfahrens unterstreichen:

- Im Unterschied zu 1–2-geschossigen Gebäuden wiesen die Tragfähigkeitsnachweise für horizontale Beanspruchung

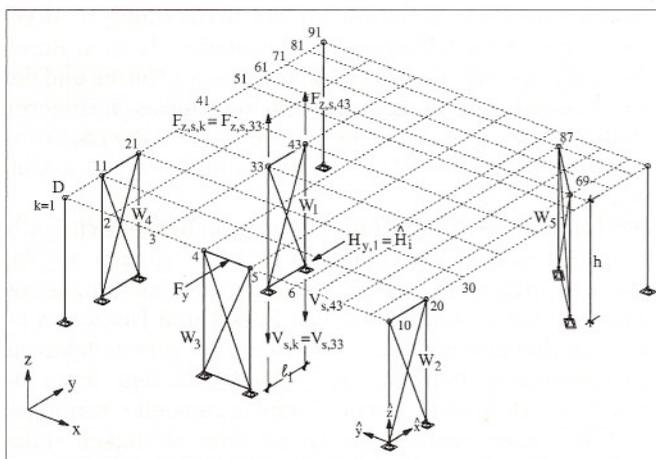


Bild 1. Dreidimensionales FE-Modell eines einzelnen Geschosses; Vorzeichendefinition
Fig. 1. Three-dimensional FE-model of a single storey; sign convention

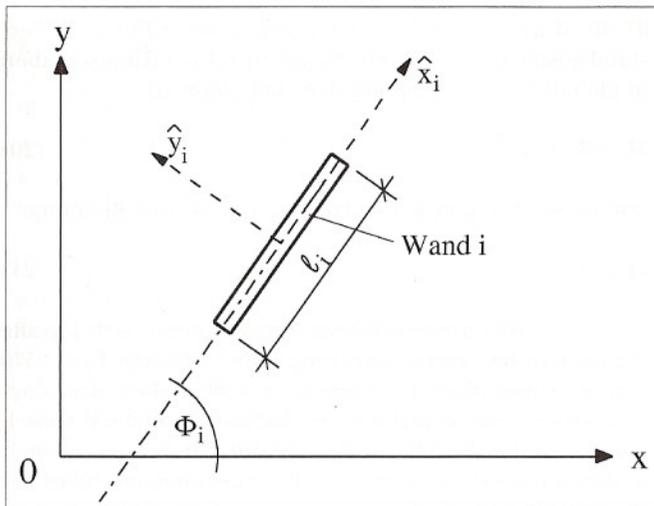


Bild 2. Orientierung der Wand i
Fig. 2. Orientation of wall i

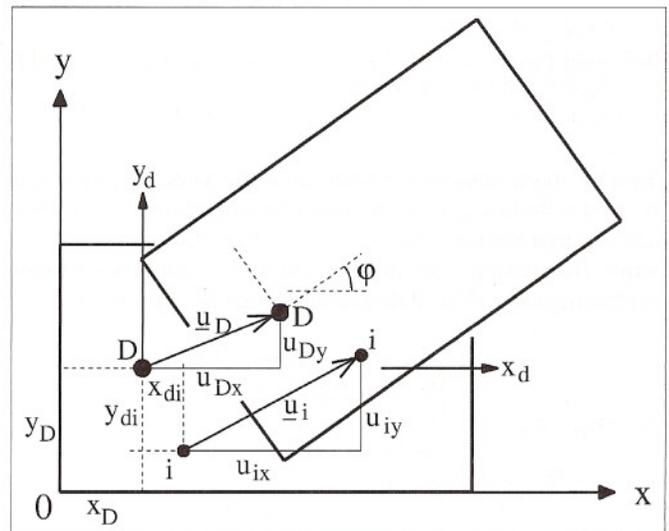


Bild 3. Translation u_D und Rotation phi der Deckenscheibe
Fig. 3. Translation u_D and rotation phi of the ceiling diaphragm

chungen der Holztafeln einen hohen Ausnutzungsgrad auf (die Verteilung der horizontalen Einwirkungen wurde mit Hilfe von 2D-Modellen bestimmt).

- Obwohl von Geschoss zu Geschoss die Deckenspannrichtung um 90° gedreht wurde, um eine möglichst gleichmäßige Verteilung der Beanspruchungen der vertikalen Rippen zu erreichen, ergaben sich für die Rippen in den aussteifenden Wandtafeln Unterschiede von bis zu 30 kN infolge vertikaler Einwirkungen.
- Je nach Ausbildung der Grundrisse werden die aussteifenden Wandtafeln des jeweils betrachteten Geschosses nicht nur infolge vertikaler Einwirkungen auf Druck, sondern gegebenenfalls auch auf Zug ($F_z > 30 \text{ kN}$) aus der Verankerung darüber liegender aussteifender Wandtafeln beansprucht.

3 Das 2D-Modell

Eine starre Deckentafel beliebiger Kontur wird durch eine horizontale Windkraft F beliebiger Richtung beansprucht und durch Wände beliebiger Anzahl m ($i = 1, \dots, m_s$), beliebiger Anordnung (x_i, y_i) und beliebiger Orientierung Φ_i gestützt.

Die Wandtafel i in Bild 2 besitzt in der durch Φ_i vorgegebenen Richtung die Steifigkeit C_i , so dass eine in der Wandebene wirkende Kraft \hat{H}_i proportional zur lokalen Verschiebung \hat{u}_i ist

$$\hat{H}_i = C_i \hat{u}_i \quad (3)$$

Die Steifigkeit C_i einer Wandtafel unter Berücksichtigung der Steifigkeit ihrer Zugverankerung hat die Größe

$$C_i = \frac{1}{\frac{1}{C_{w,i}} + \frac{1}{C_{t,i}}} \quad (4)$$

wobei $C_{w,i}$ die Schubsteifigkeit der starr gelagerten Wand ist, die sich nach Kessel [11] aus der Steifigkeit der Rippen, der Beplankung, der Verbindungsmittel und der Kontaktpressung der Rippen untereinander ergibt. Die Minderung der Steifigkeit der Wand durch ihre Zugverankerung lässt sich

durch eine Schubsteifigkeit $C_{t,i}$ ausdrücken, die sich aus der Steifigkeit $K_{t,i}$ des Zuganschlusses bestimmen lässt

$$C_{t,i} = K_{t,i} \left(\frac{\ell_i}{h} \right)^2 \quad (5)$$

- In Bild 3 ist der Ausgangszustand (ohne Windeinwirkung) und der verschobene Zustand (mit Windeinwirkung) der starren Deckentafel dargestellt. Die Verschiebung jedes Punktes i der Deckentafel lässt sich angeben als Summe der Verschiebungskomponenten

$$\underline{u}_i = u_{ix} \underline{e}_x + u_{iy} \underline{e}_y = \underline{u}_{ix} + \underline{u}_{iy} \quad (6)$$

Dieses Verschiebungsfeld lässt sich, wie jedes Verschiebungsfeld eines starren Körpers, in eine Translation \underline{u}_D und eine Rotation u_ϕ bezogen auf einen beliebigen Punkt D zerlegen

$$\underline{u}_i = \underline{u}(x_i, y_i) = \underline{u}_D(x_i, y_i) + \underline{u}_\phi(x_i - x_D, y_i - y_D) \quad (7)$$

mit der Translation

$$\underline{u}_D(x_i, y_i) = \underline{u}_D = \underline{u}_{Dx} + \underline{u}_{Dy} \quad (8)$$

und für kleine Drehungen ϕ mit der Rotation

$$\underline{u}_\phi(x_{di}, y_{di}) = \underline{\phi} \times \underline{r}_{di} = \begin{vmatrix} \underline{e}_x & \underline{e}_y & \underline{e}_z \\ 0 & 0 & \phi \\ x_{di} & y_{di} & 0 \end{vmatrix} = -\phi y_{di} \underline{e}_x + \phi x_{di} \underline{e}_y \quad (9)$$

Das elastische Potential dieses Systems beträgt, siehe auch Rosman [4], Heinisuo [5] und Schmidt und Moody [6],

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_a = \sum_{i=1}^m \frac{1}{2} C_i \hat{u}_i^2 - \underline{F} \underline{u}_F \quad (10)$$

Der verschobene Zustand der starren Deckentafel lässt sich durch den Zustandsvektor

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ \varphi \end{bmatrix} \quad (11)$$

beschreiben, dessen Komponenten die Verschiebungen in x- und y-Richtung und die Starrkörperdrehung $\varphi = \varphi_z$ sind. Damit lässt sich die Zerlegung des Verschiebungsfeldes in eine Translation und eine Rotation für einen beliebigen Referenzpunkt D in Matrixschreibweise darstellen

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{u}_D + \mathbf{u}_{\varphi i} = \left(\mathbf{I} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & -y_{di} \\ 0 & 0 & x_{di} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} u_{Dx} \\ u_{Dy} \\ \varphi \end{bmatrix} = (\mathbf{I} + \mathbf{D}_i) \mathbf{u}_D. \quad (12)$$

Die lokalen Verschiebungen $\hat{\mathbf{u}}_i$ und \mathbf{u}_F können damit durch den globalen Zustandsvektor ausgedrückt werden

$$\hat{\mathbf{u}}_i = \mathbf{R}_i (\mathbf{I} + \mathbf{D}_i) \mathbf{u}_D, \quad \mathbf{u}_F = \mathbf{R}_F (\mathbf{I} + \mathbf{D}_F) \mathbf{u}_D, \quad (15)$$

mit den Drehmatrizen

$$\mathbf{R}_i = \begin{bmatrix} \cos \Phi_i & \sin \Phi_i & 0 \\ -\sin \Phi_i & \cos \Phi_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}_F = \begin{bmatrix} \cos \Phi_F & \sin \Phi_F & 0 \\ -\sin \Phi_F & \cos \Phi_F & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (14), \quad (15)$$

Die potentielle Energie hat dann die Form

$$\Pi = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \mathbf{u}_D^T (\mathbf{I} + \mathbf{D}_i)^T \mathbf{R}_i^T \mathbf{C}_i \mathbf{R}_i (\mathbf{I} + \mathbf{D}_i) \mathbf{u}_D - \mathbf{u}_D^T (\mathbf{I} + \mathbf{D}_F)^T \mathbf{R}_F^T \mathbf{F} \mathbf{R}_F. \quad (16)$$

mit dem globalen Lastvektor $\mathbf{F}^T = [F_x \ F_y \ M_z]$. Das Prinzip vom Minimum der potentiellen Energie

$$\Pi = \text{Min.} \Leftrightarrow \frac{d\Pi}{d\mathbf{u}_D} = 0 \quad (17)$$

liefert die Algebraisierung des Problems in der Form

$$\frac{d\Pi}{d\mathbf{u}_D} = \underbrace{\sum_{i=1}^m (\mathbf{I} + \mathbf{D}_i)^T \mathbf{R}_i^T \mathbf{C}_i \mathbf{R}_i (\mathbf{I} + \mathbf{D}_i)}_{\mathbf{C}} \mathbf{u}_D - \underbrace{(\mathbf{I} + \mathbf{D}_F)^T \mathbf{R}_F^T \mathbf{F} \mathbf{R}_F}_{\mathbf{F}^D} = 0 \quad (18)$$

$$\text{oder } \mathbf{C} \mathbf{u}_D - \mathbf{F}^D = 0.$$

Die in der Summe der globalen Steifigkeitsmatrix C der Stützung der Deckentafel enthaltene lokale Steifigkeitsmatrix der Wand i hat die einfache Form

$$\mathbf{C}_i = \begin{bmatrix} C_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (19)$$

da die Wand nur Beanspruchungen in ihrer Ebene Widerstand leistet. Die Stützkkräfte H_i der einzelnen Wandscheiben in globalen Richtungen ergeben sich dann zu

$$\mathbf{H}_i = \mathbf{R}_i^T \mathbf{C}_i \mathbf{R}_i \mathbf{u}_i \quad (20)$$

und in der durch Φ_i gekennzeichneten lokalen Richtung

$$\hat{\mathbf{H}}_i = \mathbf{R}_i \mathbf{H}_i. \quad (21)$$

Für das in Bild 5 beschriebene Beispiel ergibt sich für alle Wandtafeln bei starrer Lagerung eine Steifigkeit $C_i = 1370$ N/mm. Unter Berücksichtigung der Steifigkeit des Zuganschlusses eine Steifigkeit $C_i = 550$ N/mm. Für die Wände 1, 2 und 4 ist der Winkel mit $\Phi_i = 90^\circ$, für die Wand 3 mit $\Phi_3 = 0^\circ$ und für die Wand 5 mit $\Phi_5 = 135^\circ$ anzunehmen. Wird der Referenzpunkt D in den Ursprungspunkt 0 gelegt, sind die Koordinaten x_{di} und y_{di} der Wände leicht ablesbar und ergeben zum Beispiel für Wand 5 zu $x_{d5} = 7,5$ und $y_{d5} = 7,5$.

Ohne Berücksichtigung der Steifigkeit der Zuganschlüsse ergibt sich mit Hilfe der oben beschriebenen Rechenoperationen und dem Kräftesystem

$$\mathbf{F}^D = \begin{bmatrix} F_x^D \\ F_y^D \\ M_z^D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 12 \\ 52,5 \end{bmatrix}$$

die globale Steifigkeitsmatrix

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2,1 & -0,7 & -10,3 \\ -0,7 & 4,8 & 25,7 \\ -10,3 & 25,7 & 267,6 \end{bmatrix}.$$

Wie in Kapitel 2 schon erwähnt, entsprechen die sich damit ergebenden Stützkkräfte $\hat{\mathbf{H}}_i$ denen der Modelle 1a bzw. b aus Tabelle 1.

4 Erweiterung des 2D-Modells zu einem 2½D-Modell

Das 2D-Modell nach Gleichung (1) wird durch einen Iterationsprozess erweitert, der es ermöglicht, die Einflüsse der Steifigkeiten und der vertikalen Einwirkungen auf die Verteilung der horizontalen Lagerkräfte mit überschaubarem Aufwand berücksichtigen zu können. Dazu ist es erforderlich

- die Steifigkeit C_i in Abhängigkeit der Scheibensteifigkeit der Tafel und der realen Steifigkeiten der Verbindungen und Lagerungen in einer Vorlaufrechnung zu ermitteln,
- über die horizontalen Lagerkräfte hinaus auch die vertikalen Lagerkräfte zu bestimmen,
- über die horizontalen Einwirkungen hinaus auch die vertikalen Einwirkungen der entsprechenden Lastfallkombination mit zu führen und
- den Ort der vertikalen Lagerkräfte und Einwirkungen so zu dokumentieren, dass zugehörige Kräfte über mehrere Geschosse verfolgt und verglichen werden können.

Dieses erweiterte 2D-Modell wird im Weiteren als 2½D-Modell bezeichnet.

Wird nun der linken und der rechten Randrippe jeder Wandtafel $i = 1, \dots, m_s$ der n Geschosse im Grundriss jeweils eine fortlaufende Positions- oder Knotennummer k zugeordnet, so ergibt sich für jedes Geschoss $s = 1, \dots, n$ ein Knotennummernverzeichnis \mathbf{K}_s der Größe $2m_s$ und damit für das Beispiel in Bild 1 mit $m_s = 5$

$$K_s = \begin{bmatrix} 33 & 10 & 4 & 11 & 87 \\ 43 & 20 & 5 & 21 & 69 \end{bmatrix}$$

und dem Entwicklungsschema

i	1	2	3	4	5
k ₁	33	10	4	11	87,
k ₂	43	20	5	21	69

wobei in allen n Geschossen Knoten mit identischen x,y-Koordinaten identische Nummern besitzen.

Mit Hilfe des Knotennummernverzeichnisses K_s kann nun jede vertikale Lagerkraft V_i der Wände eines Geschosses s einem Knoten k zugewiesen werden, so dass ein Feld V_s (als reactio) vertikaler Lagerkräfte V_{s,k} mit k = 1, ..., 2m_s entsteht. In gleicher Weise werden die vertikalen Einwirkungen in ein Feld F_{z,s} gestellt, das auch den Inhalt des Felds V_{s+1} (als actio) enthält, hier

$$F_{z,s} = \begin{bmatrix} -5,0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -5,0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Zunächst wird angenommen, die Wand 1 sei durch vertikale Einwirkungen überdrückt, so dass für sie die Steifigkeit einer starr gelagerten Wand angesetzt wird, hier C_{w,i} = 1370 N/mm. Bei den restlichen Wänden wird die Steifigkeit C_{i,j} nach Gleichung (5) berücksichtigt, so dass sich eine Steifigkeit C_i = 550 N/mm ergibt. Die sich daraus ergebende globale Gesamtsteifigkeitsmatrix wird mit C₀ bezeichnet. Mit ihr ergibt sich infolge des Kräftesystems F^D = (0; 12; 52,5) das Verschiebungsfeld u und damit die horizontalen Lagerkräfte

$$H_i = \begin{bmatrix} H_{x,i} \\ H_{y,i} \\ M_{z,i} \end{bmatrix}, \text{ hier } H_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 6,1 \\ 0 \end{bmatrix}; H_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2,6 \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$H_3 = \begin{bmatrix} 0,9 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; H_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2,4 \\ 0 \end{bmatrix}; H_5 = \begin{bmatrix} -0,9 \\ 0,9 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Infolge der Lagerkräfte \hat{H}_i ergibt sich aus dem Momentengleichgewicht jeder Wand das Feld V_s der vertikalen Lagerkräfte zu

$$V_s = \begin{bmatrix} 14,2 & 6,0 & 2,1 & 5,6 & -3,0 \\ -14,2 & -6,0 & -2,1 & -5,6 & 3,0 \end{bmatrix}$$

Solange dann für alle Knoten mit F_{z,s,k} < 0 und ihre zugehörige Lagerkraft infolge horizontaler Einwirkung V_{s,k} als Komponente von V_s gilt

$$F_{z,s,k} + V_{s,k} \leq 0, \quad (\text{Bedingung 1})$$

beteiligen sich die entsprechenden Wände mit ihrer Schubsteifigkeit C_{w,i} bei starrer Lagerung an der Weiterleitung der horizontalen Kräfte, da keine Verankerungskräfte auftreten. Gilt hingegen für einen Knoten k

$$F_{z,s,k} + V_{s,k} > 0, \quad (\text{Bedingung 2})$$

wie es hier im Beispiel für den Knoten 33 der Fall ist, so treten Verankerungskräfte auf, die die Steifigkeit des Zuganschlusses K_{i,j} aktivieren und damit die effektive Schubsteifigkeit der Wand mindern. Die Gesamtsteifigkeitsmatrix muss neu berechnet werden. Das zur Gesamtsteifigkeitsmatrix C₀ gehörige Kräftesystem ergibt sich aus

$$F_0^D = \frac{|F_{z,s,k}|}{V_{s,k}} F^D, \quad (22)$$

$$\text{hier } F_0^D = \frac{[-5,0]}{14,2} F^D = (0; 4,2; 18,5),$$

und erzeugt das Verschiebungsfeld u_{D,0}.

Auf gleiche Weise ergeben sich $\hat{H}_{i,0}$ und das Feld V_{s,0}. Der Rest der Einwirkungen

$$F_1^D = (1 - \frac{F_{z,s,k}}{V_{s,k}}) F^D, \quad (23)$$

hier F₁^D = (0; 7,8; 34), verursacht unter Berücksichtigung der abgeminderten neuen Gesamtsteifigkeit C₁ die zusätzlichen Verschiebungen u_{D,1} und vertikalen Lagerkräfte V_{s,1}

$$V_{s,1} = \begin{bmatrix} 5,7 & 5,0 & 1,4 & 6,0 & -2,0 \\ -5,7 & -5,0 & -1,4 & -6,0 & 2,0 \end{bmatrix}$$

Mit dem neuen Feld der vertikalen Einwirkungen

$$F_{z,s,1} = V_{s,0} + F_{z,s} = \begin{bmatrix} 0 & 2,1 & 0,7 & 2,0 & -1,0 \\ -10 & -2,1 & -0,7 & -2,0 & 1,0 \end{bmatrix}$$

kann der Iterationsprozess neu begonnen und solange durchgeführt werden, bis die Bedingung 1 für alle Knoten mit F_{z,s,k} < 0 erfüllt ist, was hier bereits beim ersten Iterationsschritt der Fall ist.

Das endgültige Verschiebungsfeld u_{tot} ergibt sich aus

$$u_{tot} = u_0 + u_1 + \dots + u_j \quad \text{mit } j \text{ Iterationsschritten.}$$

Entsprechendes gilt für die Lagerkräfte $\hat{H}_{i,tot}$ und die vertikalen Lagerkräfte V_{s,tot}. Die Lagerkräfte $\hat{H}_{i,tot}$ entsprechen den Ergebnissen des Modells 1c aus Tabelle 1.

Aus der Superposition der vertikalen Lagerkräfte V_{s,tot} mit F_{z,s} und der Berücksichtigung der vertikalen Einwirkungen aus der Deckenbalkenlage über dem Geschoss s-1 ergibt sich das neue Feld F_{z,s-1} der vertikalen Einwirkungen des Geschosses s-1. Hier ohne Einwirkungen aus der Deckenbalkenlage

$$F_{z,s-1} = \begin{bmatrix} 5,7 & 7,1 & 2,1 & 8,0 & -3,0 \\ -15,7 & -7,1 & -2,1 & -8,0 & 3,0 \end{bmatrix}$$

Erst dieses 2½D-Modell macht es möglich, die zum Nachweis der Tragfähigkeit von mehrgeschossigen Holztafeltragwerken erforderlichen Lastfallkombinationen zu untersuchen.

Außerdem ermöglicht das Verfahren z.B. die Berücksichtigung von Wandtafeln mit begrenzter Tragfähigkeit der

Zugverankerung, indem, wie für die vertikalen Einwirkungen, auch für die Tragfähigkeit der Zugverankerungen ein Feld F_t aufgestellt und mit dem Feld V_s verglichen wird.

Auch das Mitwirken von unverankerten Wandtafeln an der horizontalen Lastabtragung kann einfach berücksichtigt werden, indem nach Auftreten der Bedingung 2 die Steifigkeit der betroffenen Wand im nächsten Iterationsschritt zu Null gesetzt wird.

Durch das Verfahren mit dem 2½D-Modell kann die Anzahl und Ausführung teurer Zugverankerungen auf das zur Sicherheit erforderliche Minimum und das wirtschaftlich gewünschte Maximum beschränkt werden.

5 Ausblick

Zur weiteren Optimierung des Tragwerksentwurfs und zum besseren Verständnis des räumlichen Tragverhaltens mehrgeschossiger Gebäude werden zur Zeit,

- Wände in L-, T- und U-Stellungen,
- der Einfluss der restlichen Anschluss- und Lagerungssteifigkeiten der Wandtafeln und
- Wandtafeln, die nicht direkt an ihren Randrippen, sondern über die Plattensteifigkeit der Deckentafel auch an entfernteren Lagerungspunkten verankert sind,

untersucht, und das vorgestellte 2½D-Modell und gegebenenfalls auch die FE-Modelle für die räumliche Betrachtung des Tragwerksmodells modifiziert und vervollständigt. Diese Untersuchungen werden am iHolz im Rahmen des von der Deutschen Forschungsgemeinschaft DFG geförderten Forschungsvorhabens „Entwicklung von Tragwerksmodellen zur Beschreibung des räumlichen Tragverhaltens mehrgeschossiger Gebäude in Holztafelbauart“ durchgeführt.

Literatur

- [1] v. Halász, R.; Tantow, G.: Großtafelbauten – Konstruktion und Bemessung. Bauingenieur-Praxis, Heft 55, Verlag von Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin, 1966
- [2] Cziesielski, E.: Stabilität von Holzhäusern unter Horizontalbelastung. Bauen mit Holz, Heft 7, 1982, S. 446–450
- [3] Steinmetz, D.: Die Aussteifung von Holzhäusern am Beispiel des Holzrahmenbaus. Holzbau-Statik-Aktuell, Ausgabe Juli 1992/1
- [4] Rosman R.: Faltwerke als aussteifende Systeme bei Hochbauten. Bauing. 42 (1967), S. 55–66
- [5] Heinisuo, M.: On the Distribution of the Horizontal Loading Due to Earthquake and Extreme Wind in Prefabricated Low-Rise Wooden Buildings. VTT Symposium 72, Espoo Finland, 1986
- [6] Schmidt, R. J.; Moody, R. C.: Modeling Laterally Loaded Light-Frame Buildings. Journal of Structural Engineering 115, 1989, S. 201–217
- [7] Kessel, M. H.: Räumlichkeit der Tragwerke. Vorlesungsumdruck zur Vorlesung Holzbau III am Institut für Baukonstruktion und Holzbau, Braunschweig, 2002
- [8] Kessel M. H.; Drücker K.: Zur Verankerung der Wandscheiben von Holzhäusern bei Windeinwirkung. Bauen mit Holz H 10, 1996, S. 779–782
- [9] Kessel M. H.; Dettmann O.: On the need for tension anchorage in timber houses. Proceedings of the World Conference on Timber Engineering, Vancouver, Volume 1 (2000) 1.2.4.
- [10] Kessel, M. H. et al.: Fertigungsprozessauslegung für Holzgroßprojekte im kleinbetrieblichen Unternehmensverbund niedersächsischer Zimmerei- und Holzbaubetriebe. Gefördert durch das Ministerium für Wirtschaft und Verkehr des Landes Niedersachsen, Abschlussbericht zum Förderprojekt (unveröffentlicht), 2002
- [11] Kessel, M. H.: Tafeln: Eine elastische, geometrisch lineare Beschreibung. Holzbau Kalender 2003, Bruderverlag