Geometrisch nichtlineare Berechnungen von räumlichen Stabwerken mit Imperfektionen

Anwendung auf Satteldachbinder

vom

Fachbereich Bauingenieurwesen
der Technischen Universität Carolo-Wilhelmina
zu Braunschweig

zur Erlangung des Grades eines Doktor-Ingenieurs
(Dr.-Ing.)

genehmigte
Dissertation

von Herrn André Mertinaschk
aus Cottbus

Eingereicht am:	28. Juni 2002
Mündliche Prüfung am:	15. November 2002
Berichterstatter:	Prof. Dr.-Ing. M.-H. Kessel
	Prof. Dr.-Ing. D. Dinkler

Inhaltsverzeichnis

Einleitung **1**
Motivation . . . 1
Umfang der Arbeit . . . 3

1 Boltzmann-Kontinuum **5**
1.1 Konfigurationen . . . 6
1.1.1 Referenzkonfiguration . . . 6
1.1.2 Momentankonfiguration . . . 7
1.1.3 Geometrisch imperfekte Konfiguration . . . 8
1.2 Bewegung . . . 9
1.2.1 Lagrangesche Formulierung . . . 9
1.2.2 Eulersche Formulierung . . . 9
1.3 Deformation . . . 10
1.3.1 Deformationsgradient . . . 13
1.3.2 Verzerrungstensor . . . 14
1.4 Spannungen . . . 15
1.4.1 Cauchyscher Spannungstensor . . . 16
1.4.2 Piola-Kirchhoff Spannungstensoren . . . 17
1.5 Konstitutive Beziehungen . . . 18
1.5.1 Elastizitätstensor . . . 18
1.6 Feldgleichungen . . . 19
1.7 Prinzip der virtuellen Arbeit . . . 21

2 Cosserat-Kontinuum **23**
2.1 Konfigurationen . . . 24
2.2 Deformation . . . 26
2.2.1 Deformationsgradient . . . 27
2.2.2 Verzerrungs- und Krümmungstensor . . . 28
2.3 Prinzip der virtuellen Arbeit . . . 29
2.3.1 Innere Arbeit . . . 29
2.3.2 Äußere Arbeit . . . 30

2.4 Formänderungsenergie 31
2.5 Stabgleichungen 33

3 Einordnung der Theorien 35
3.1 Allgemeines 35
3.2 Einordnung der Theorien I. bis III. Ordnung 37
3.3 Zusammenstellung 39
3.4 Beispiele 40

4 Finite-Elemente-Methode 47
4.1 Variation des Potentials 47
4.2 Elementbeschreibung 51
4.3 Berechnungsmodell 60
4.4 Berechnung 62
4.4.1 Eigenwertanalyse 63
4.4.2 Nichtlineare Berechnung 63

5 Imperfektionen 67
5.1 Definition der geometrischen Imperfektionen 68
5.1.1 Perfekter Binder 69
5.1.2 Imperfekter Binder 69
5.2 Statistische Untersuchung 73
5.2.1 Elemente der Stichprobe 73
5.2.2 Verteilungshypothese 73
5.2.3 Empfehlungen für geometrische Imperfektionen 74
5.3 Lasten und Imperfektionen 75

6 Ersatzlastgruppen 77
6.1 Ersatzlastgruppen für Imperfektionen I 77
6.2 Ersatzlastgruppen für Imperfektionen II 78

7 Anwendung auf Satteldachbinder 83
7.1 Allgemeines 83
7.1.1 Kennwerte der Festigkeiten und Steifigkeiten 84
7.2 Modellierung 84
7.2.1 System 1: Sparrendach mit Abspannung 84
7.2.2 System 2: Dreieckbinder mit Verband 84
7.2.3 System 3: Gesamtsystem 86
7.3 Eigenwertanalyse 86
7.3.1 System 1 86
7.3.2 System 2 87

7.3.3 System 3 89
7.4 Geometrisch nichtlineare Berechnung 90
7.4.1 System 1 90
7.4.2 System 2 95
7.4.3 System 3 100
7.5 Geometrisch lineare Berechnung 103
7.5.1 Ersatzlastgruppe für globale Imperfektionen 103
7.5.2 Ersatzlastgruppe für lokale Imperfektionen 108
7.5.3 Auswertung 114

8 Zusammenfassung und Ausblick **117**

Anhang **A1**

A Mathematische Grundlagen **A3**
A.1 Lineare Abbildungen A3
A.2 Dualität A4
A.3 Bilinearformen A5
A.4 Tensoren A5
A.4.1 Tensoralgebra A7
A.4.2 Tensoranalysis A8
A.5 Bewegungen des $\mathbb{R}^3$ A9
A.5.1 Drehung im $\mathbb{R}^3$ A10

Literaturverzeichnis **i**

Einleitung

Motivation

Der Entwurf eines Tragwerks stellt einen Optimierungsprozess dar, der abgesehen von der Erfüllung ästhetischer Anforderungen nicht nur eine sichere und wirtschaftliche Lösung liefert, sondern eine Lösung, die zusätzlich auch ökologisch vertretbar sein muss. Zu solchen in diesem Sinne optimierten Lösungen zählen Dachtragwerke aus Holz in Nagelplattenbauart, die, wie in Bild 1 zu erkennen ist, in der Regel extrem filigrane volumenoptimierte Strukturen sind. Ihre Primärsysteme sind Fachwerkbinder (Nagelplattenbinder), deren Fachwerkstäbe in den Knoten durch beidseitig von außen eingepresste Nagelplatten verbunden werden. Da Dächer, wenn irgend möglich, als Satteldächer entworfen werden, werden Nagelplattenbinder in der weit überwiegenden Anzahl als Dreieckbinder hergestellt. Es wird auf die Ausführungen von Kessel, Mertinaschk in [28] und [29] verwiesen.

Die einzelnen filigranen Nagelplattenbinder als Primärsysteme besitzen für Einwirkungen in ihrer Ebene große Festigkeit und Steifigkeit, solange sie als perfekt ebene Systeme betrachtet werden. Durch äußere horizontale Einwirkungen, wie z. B. Wind, und in Folge von Imperfektionen, wie material-, herstellungs- und montagebedingte Abweichungen von dem in der Planung angenommenen Idealzustand, werden die Binder jedoch immer auch senkrecht zur Binderebene belastet, für die sie allein keine ausreichende Festigkeit und Steifigkeit besitzen. Erst durch das Zusammenwirken der Binder mit Latten, Pfetten, Rispenbändern und Verbänden entsteht ein räumliches Tragsystem, ein Sekundärsystem, das auch diese Lasten sicher in die Unterkonstruktion weiterleiten kann.

Die beim Nachweis des Grenzzustandes der Tragfähigkeit zu berücksichtigenden Größen der Imperfektionen, werden ebenso wie die Größen der äußeren horizontalen Einwirkungen durch die Technischen Baubestimmungen vorgeschrieben, da von Imperfektionen ebenso wie z. B. von Wind keine Gefährdung der öffentlichen Sicherheit ausgehen darf. Während die Wahrscheinlichkeit für das Einwirken einer bestimmten Größe der Windlast wegen der in der Region, in der die Baubestimmungen gültig sind, herrschenden klimatischen Bedingungen mit zunehmender

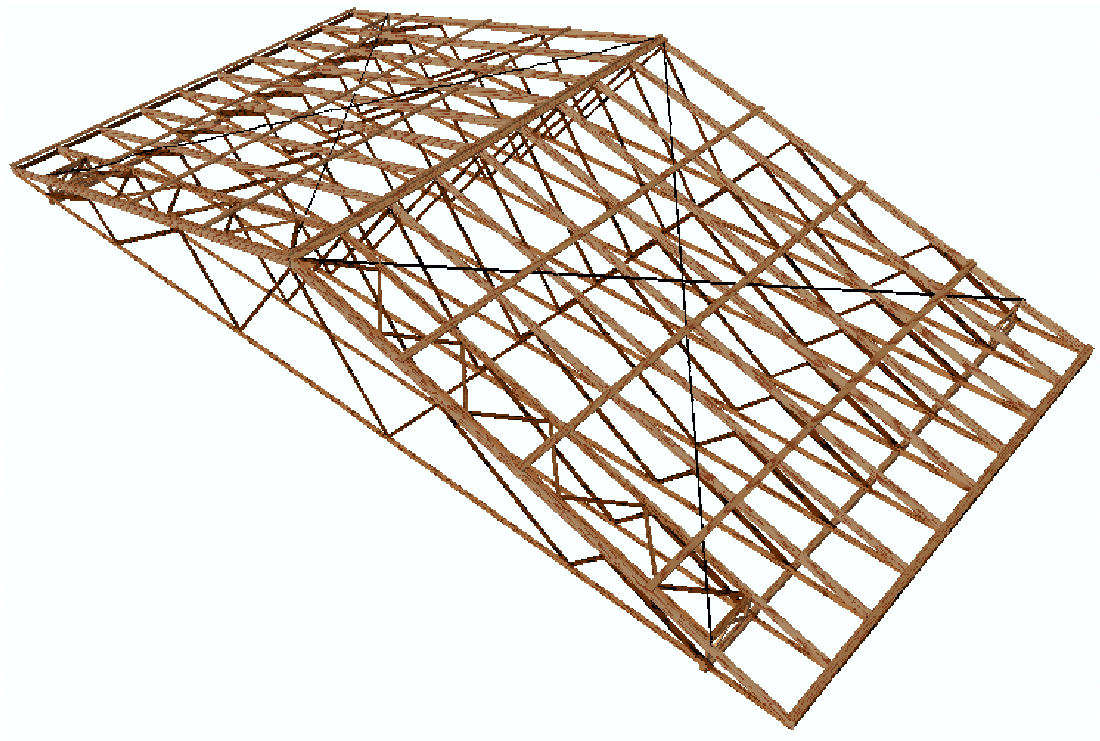


Bild 1: Satteldach aus Nagelplattenbindern

Größe der Windlast abnimmt, wird die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten großer Imperfektionen dadurch gering gehalten, dass wiederum durch Technische Baubestimmungen Baustoff-, Produkt- und Ausführungstoleranzen definiert und Grenzen hierfür gefordert werden.

Die Normen DIN 18201 und 18202 regeln die Toleranzen im Bauwesen, speziell im Hochbau. Dort werden die Begriffe Ebenheits- und Winkeltoleranz eingeführt, die dann für flächige Bauteile angegeben werden. In der zugehörigen Norm DIN 18203-3 sind für Bauteile aus Holz und Holzwerkstoffen aber nur Grenzabmaße angegeben. Die Krümmungen von Vollholz, beschrieben durch eine auf eine Länge bezogene Auslenkung, sind nach der Norm DIN 4074 auf 8 mm je 2 m Länge für Nadelholz zu begrenzen. Die Norm DIN EN 1059 fordert für die Längskrümmungen der Schmalseite 4 mm je 2 m Länge. Diese Krümmungsbeschränkungen gelten für die Einzelstäbe vor dem Zusammenfügen zu einem Binder. Für die nach der Montage vorhandenen Imperfektionen fordert die europäische Norm EC5 eine maximale Vorkrümmungsamplitude von 10 mm je Stab und eine größte Lotabweichung von 10+5(h-1) mm bzw. 25 mm, mit h als Binderhöhe.

Der Einfluss der Imperfektionen auf die Grenzzustände der Tragfähigkeit kann nur durch die Berechnung der Beanspruchungen am räumlichen Sekundärsystem ermittelt werden, das aus einem Teil der Primärsysteme und den aussteifenden

Bild 2: Modell eines Dreieckbinders der W - Form

Bauteilen besteht. Die Berechnung kann entweder geometrisch nichtlinear unter Berücksichtigung der Imperfektionen oder linear unter Berücksichtigung von Ersatzlastgruppen bei perfekter Systemgeometrie durchgeführt werden. Größe und Form der Ersatzlastgruppen müssen so gewählt sein, dass sie im Tragwerk Beanspruchungen verursachen, die den durch die Imperfektionen verursachten Beanspruchungen vergleichbar sind.

Umfang der Arbeit

Zur Erklärung des geometrisch nichtlinearen Tragverhaltens der Gesamtstruktur ist es wegen der räumlichen Komplexität des Sekundärsystems erforderlich, die darin enthaltene Vielzahl einzelner nichtlinearer Phänomene an einzelnen einfachen übersichtlichen Teilstrukturen anschaulich nachvollziehbar zu beschreiben und diese dann Stück für Stück zur komplexen Gesamtstruktur wieder zusammenzubauen.

Da hier nicht unbedingt mit einem gutmütigen nichtlinearen Verhalten zu rechnen ist, müssen immer auch die postkritischen Bereiche betrachtet werden. Solche Betrachtungen setzen voraus, dass eine konsistente nichtlineare Stabtheorie benutzt wird.

Zur Gewährleistung dieser Konsistenz werden aufbauend auf den kontinuumsmechanischen Grundlagen, die in Kapitel 1 dargelegt werden, eine allgemeine Stabtheorie für den geraden wölbfreien Stab hergeleitet und die linearisierten Stabgleichungen angegeben, siehe Kapitel 2. In Kapitel 3 werden die im Ingenieurwesen bekannten Stabtheorien verschiedener Ordnung dargestellt und an zwei einfachen Beispielen die unterschiedlichen Ergebnisse verglichen.

Die Algebraisierung der Stabgleichungen mit Hilfe der Finiten Element Methode erfolgt in Kapitel 4. Weiterhin werden Imperfektionen allgemein beschrieben und die geometrischen Imperfektionen definiert. Auf der Grundlage einer statistisch ausgewerteten Untersuchung werden Größen für diese Imperfektionen angegeben. Kapitel 6 enthält zwei Darstellungen von Ersatzlastgruppen und beschreibt deren wesentliche Unterschiede.

Kapitel 7 beschäftigt sich mit der Anwendung der in den Kapiteln 1 bis 6 dargestellten Zusammenhänge. Dazu werden verschiedene Stabwerke hinsichtlich ihrer Imperfektionsempfindlichkeit und des postkritischen Tragverhaltens untersucht und unter Berücksichtigung der kritischen Lasten Ersatzlastgruppen für die verschiedenen Imperfektionsarten angegeben.

Kapitel 1

Boltzmann-Kontinuum

Im folgenden werden die kontinuumsmechanischen Grundlagen der Elastizitätstheorie in kurzer und übersichtlicher Form dargestellt. Sehr ausführliche Ausarbeitungen zu dieser Thematik finden sich u.a. bei BERTRAM in [5], HOPPE in [22] und STEIN/ BARTHOLD in [54].

Zur allgemeinen Beschreibung der Lage und Bewegung eines Körpers werden vorab einige Begriffe eingeführt. Gegenstand der Betrachtungen ist ein physikalischer Körper $\mathcal{B}$ mit isotropen elastischen Materialeigenschaften, ein Kontinuum. In der klassischen Kontinuumsmechanik wurde an dieser Stelle von LUDWIG BOLTZMANN (1899) ein später nach ihm benanntes Axiom eingeführt, das von der Symmetrie des Spannungstensors ausgeht, siehe hierzu SCHAEFER in [52].

Dieser physikalische Körper ändert unter Einwirkungen, wie Kräften, Temperaturänderungen u.a., seine Lage und/oder Gestalt. Der Körper $\mathcal{B}$ lässt sich als Menge zusammenhängender materieller Punkte $\mathcal{M}$, siehe Bild 1.1, auffassen.

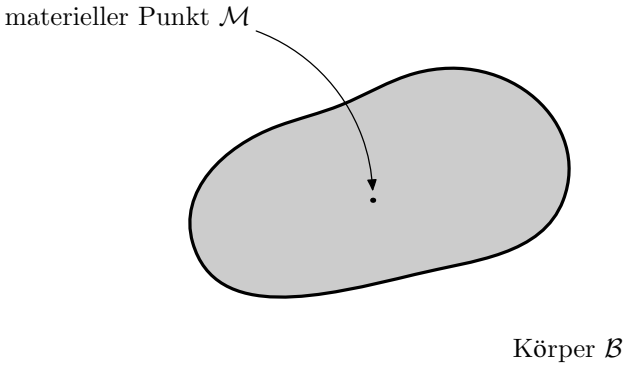


Bild 1.1: Physikalischer Körper $\mathcal{B}$

1.1 Konfigurationen

Erst die Einbettung der Menge materieller Punkte $\mathcal{M}$ in den EUKLIDischen $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{E}^3$ durch Wahl einer zeitlich invarianten Orthonormalbasis, im einfachsten Fall die kartesische Basis $\mathbf{E} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, ermöglicht eine mathematisch exakte Darstellung der Lage und Bewegung des materiellen Körpers $\mathcal{B}$. Jeder Punkt $\mathcal{M}$ dieses Körpers kann nun durch einen Vektor $\vec{x}$ bezüglich der Basis $\mathbf{E}$, unter Ausnutzung der EINSTEINschen Summenkonvention, in der Form

$$\vec{x} = x^i \vec{e}_i \quad \textit{für } i = 1, 2, 3 \textit{ und } x^i \in \mathbb{R} \tag{1.1}$$

dargestellt werden.

Der Vektor $\vec{x}$ lässt sich also als Linearkombination der Basisvektoren $\vec{e}_i$ beschreiben, wobei die Skalare auch als die kartesischen Koordinaten des Vektors $\vec{x}$ bezüglich der Basis $\mathbf{E}$ bezeichnet werden. Diese Koordinaten, dargestellt als Zahlentripel, sind Elemente des $\mathbb{R}^3$. Da der EUKLIDische Vektorraum $\mathbb{E}^3$ isomorph zum Vektorraum $\mathbb{R}^3$ ist, $\mathbb{E}^3 \cong \mathbb{R}^3$, wird im folgenden nicht mehr zwischen diesen Räumen unterschieden.

Nun ist es möglich, ausgehend von den der Punktmenge zugeordneten Vektoren im $\mathbb{R}^3$, die Bewegung zu jedem Zeitpunkt t bezüglich der Basis $\mathbf{E}$ eindeutig zu beschreiben.

Die Einbettung der Menge materieller Punkte $\mathcal{M}$ in den $\mathbb{R}^3$, dargestellt in Bild 1.2, erfolgt durch eine stetige, bijektive Abbildung χ mit

$$\chi : \begin{cases} \mathcal{B} & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ \mathcal{M} & \mapsto & \chi(\mathcal{M}) \end{cases} \tag{1.2}$$

und heißt Konfiguration. Eine solche Abbildung wird auch homöomorph oder topologisch genannt.

1.1.1 Referenzkonfiguration

Nach der Einführung in Abschnitt 1.1 werden nun für die Zeit $t = t_0$ und $t = t_1$ (t_1 beliebig) die zugehörigen Konfigurationen angegeben. Zur Zeit $t = t_0$, die auch als Referenzzeit bezeichnet wird, befindet sich der Körper in der durch die homöomorphe Abbildung ${}^0\chi$, mit

$${}^0\chi : \begin{cases} \mathcal{B} & \rightarrow & {}^0\mathrm{B} \subset \mathbb{R}^3 \\ \mathcal{M} & \mapsto & {}^0\chi(\mathcal{M}) =: \vec{X} \end{cases} \tag{1.3}$$

definierten Referenzkonfiguration, auch oft als Ausgangskonfiguration bezeichnet. Der Körper befindet sich dann in einer spannungsfreien unverformten Lage. Im

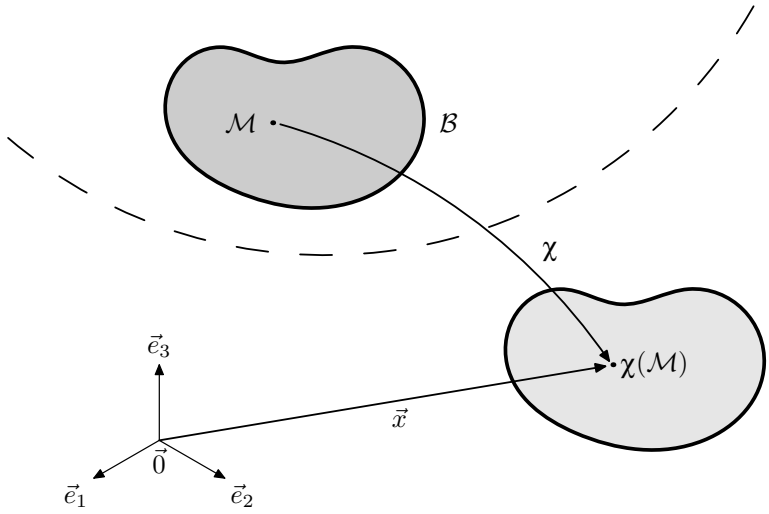


Bild 1.2: Einbettung der Menge materieller Punkte $\mathcal{M}$

folgenden werden die Vektoren der Referenzkonfiguration wie in Abbildung 1.3 angegeben mit $\vec{X}$ bezeichnet. Da die Abbildung ${}^0\chi$ homöomorph ist, existiert auch die Umkehrabbildung ${}^0\chi^{-1}$ mit

$$ {}^0\chi^{-1} : \left\{ \begin{array}{lcl} {}^0\mathrm{B} & \rightarrow & \mathcal{B} \\ \vec{X} & \mapsto & \mathcal{M} = {}^0\chi^{-1}(\vec{X}) \end{array} \right. \tag{1.4} $$

Die Referenzkonfiguration soll der in der Entwurfs- und Planungsphase angenommenen Geometrie entsprechen.

1.1.2 Momentankonfiguration

Für einen beliebigen Zeitpunkt $t > t_0$ wird der Begriff der Momentankonfiguration eingeführt. Diese Konfiguration stellt den verformten Körper dar. Die zugehörige Abbildung ${}^t\chi$ lautet

$$ {}^t\chi : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathcal{B} & \rightarrow & {}^t\mathrm{B} \subset \mathbb{R}^3 \\ \mathcal{M} & \mapsto & {}^t\chi(\mathcal{M}) =: \vec{x} \end{array} \right. \tag{1.5} $$

Zur Unterscheidung werden die Vektoren der Momentankonfiguration mit $\vec{x}$ bezeichnet. Die Existenz der inversen Abbildung ${}^t\chi^{-1}$

$$ {}^t\chi^{-1} : \left\{ \begin{array}{lcl} {}^t\mathrm{B} & \rightarrow & \mathcal{B} \\ \vec{x} & \mapsto & \mathcal{M} = {}^t\chi^{-1}(\vec{x}) \end{array} \right. \tag{1.6} $$

wird vorausgesetzt.

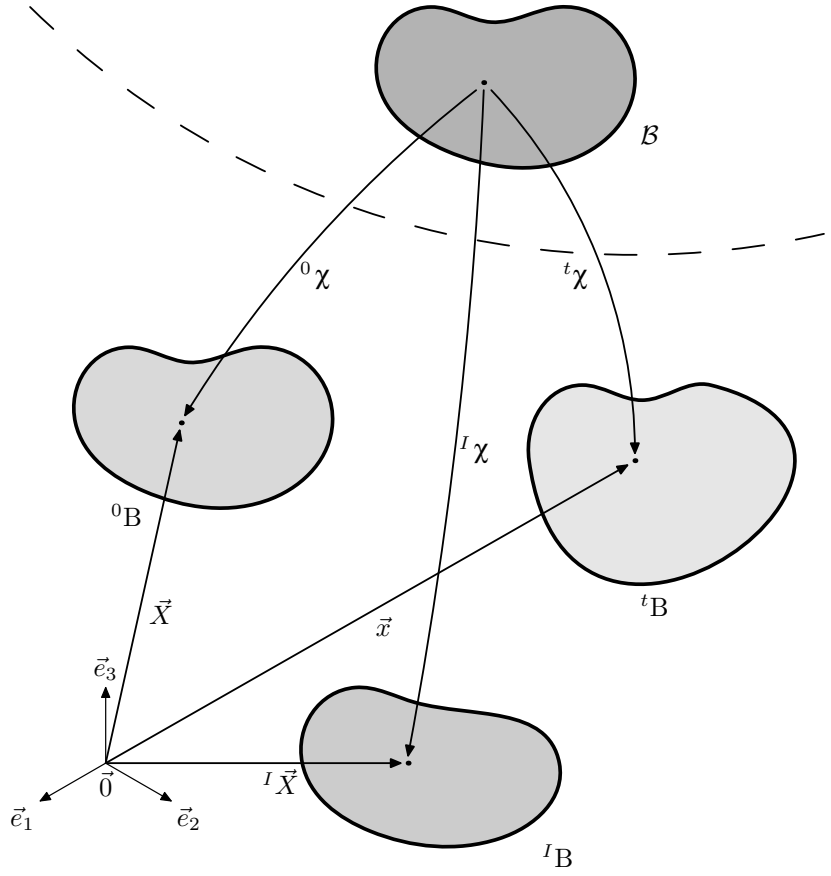


Bild 1.3: Konfigurationen

1.1.3 Geometrisch imperfekte Konfiguration

Zusätzlich wird hier eine Konfiguration eingeführt, in der die geometrischen Imperfektionen berücksichtigt werden.

Zur Zeit $t_0 < t_I < t_1$ die jetzt als Imperfektionszeit bezeichnet wird befindet sich der Körper in der durch die homöomorphe Abbildung ${}^I\chi$, mit

$$ {}^I\chi : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathcal{B} & \rightarrow & {}^I\mathrm{B} \subset \mathbb{R}^3 \\ \mathcal{M} & \mapsto & {}^I\chi(\mathcal{M}) =: {}^I\vec{X} \end{array} \right. \tag{1.7} $$

definierten geometrisch imperfekten weiterhin spannungsfreien und unverformten Konfiguration. Auch für diese Konfiguration existiere die Umkehrabbildung

$$ {}^I\chi^{-1} : \left\{ \begin{array}{lcl} {}^I\mathrm{B} & \rightarrow & \mathcal{B} \\ {}^I\vec{X} & \mapsto & \mathcal{M} = {}^I\chi^{-1}({}^I\vec{X}). \end{array} \right. \tag{1.8} $$

Übergang von der Referenzkonfiguration zur geometrisch imperfekten Konfiguration

Der Übergang der Referenzkonfiguration in die geometrisch imperfekte Konfiguration wird durch die homöomorphe Abbildung ϕ_{t_I,t_0} beschrieben. Dabei werden den materiellen Punkten $\mathcal{M}$ des Körpers $\mathcal{B}$ die Vektoren ${}^I\vec{X}$, wie in 1.1.3 angegeben, zugeordnet. Die Abbildung ϕ_{t_I,t_0} beschreibt keine Deformation, vielmehr lässt sie sich in der Form

$$\phi_{t_I,t_0} : \begin{cases} {}^0\mathrm{B} & \rightarrow & {}^I\mathrm{B} \\ \vec{X} & \mapsto & {}^I\vec{X} := \vec{X} + \vec{i} \end{cases} \tag{1.9}$$

angeben. Der Vektor $\vec{i}$ beschreibt dabei die imperfekte Lage der Punkte. In Bild 1.3 sind alle betrachteten Konfigurationen eingetragen.

1.2 Bewegung

1.2.1 Lagrangesche Formulierung

Nun kann die Momentankonfiguration zum Zeitpunkt t ausgehend von der Referenzkonfiguration zum Zeitpunkt t_0 oder der geometrisch imperfekten Konfiguration zum Zeitpunkt t_I als Abbildung ϕ_{t,t_0} bzw. ϕ_{t,t_I}

$$\phi_{t,t_0} : \begin{cases} {}^0\mathrm{B} & \rightarrow & {}^t\mathrm{B} \\ \vec{X} & \mapsto & \vec{x} = [{}^t\chi \circ {}^0\chi^{-1}](\vec{X}) =: \phi_{t,t_0}(\vec{X}) \end{cases} \tag{1.10}$$

bzw.

$$\phi_{t,t_I} : \begin{cases} {}^I\mathrm{B} & \rightarrow & {}^t\mathrm{B} \\ {}^I\vec{X} & \mapsto & \vec{x} = [{}^t\chi \circ {}^I\chi^{-1}]({}^I\vec{X}) =: \phi_{t,t_I}({}^I\vec{X}) \end{cases} \tag{1.11}$$

angegeben werden. Im kommutativen Diagramm in Bild 1.4 sind die homöomorphen Abbildungen des Körpers $\mathcal{B}$ in den $\mathbb{R}^3$ zur Zeit $t = t_0$, $t = t_I$ und $t = \textit{beliebig}$ und die homöomorphen Abbildungen der Referenzkonfiguration bzw. geometrisch imperfekten Konfiguration in die Momentankonfiguration dargestellt.

Diese Darstellung der Bewegung eines Punktes im $\mathbb{R}^3$ wird als materielle oder LAGRANGEsche Formulierung bezeichnet, da die Lage der Punkte der Momentankonfiguration bezüglich der Punkte der Referenzkonfiguration bzw. der geometrisch imperfekten Konfiguration beschrieben wird.

1.2.2 Eulersche Formulierung

Eine weitere Möglichkeit der Beschreibung der Bewegung, unter Voraussetzung der Existenz der inversen Abbildungen ϕ_{t,t_0}^{-1} bzw. ϕ_{t,t_I}^{-1}, besteht bezüglich der Momen-

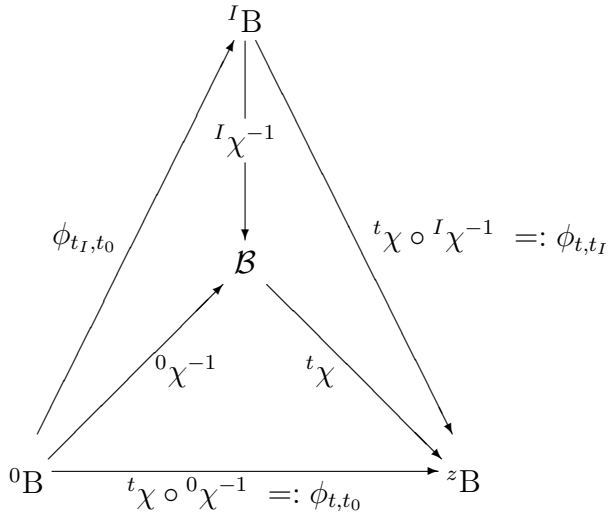


Bild 1.4: LAGRANGEsche Darstellung

tankonfiguration in der Form

$$\phi_{t,t_0}^{-1} : \begin{cases} {}^t\mathrm{B} & \to & {}^0\mathrm{B} \\ \vec{x} & \mapsto & \vec{X} = \phi_{t,t_0}^{-1}(\vec{x}) \end{cases} \tag{1.12}$$

bzw.

$$\phi_{t,t_I}^{-1} : \begin{cases} {}^t\mathrm{B} & \to & {}^I\mathrm{B} \\ \vec{x} & \mapsto & {}^I\vec{X} = \phi_{t,t_I}^{-1}(\vec{x}) \end{cases} . \tag{1.13}$$

Diese Darstellung der Bewegung eines Punktes im $\mathbb{R}^3$ wird als EULERsche Formulierung bezeichnet, da die Lage der Punkte bezüglich der Momentankonfiguration beschrieben wird. Da die Momentankonfiguration das deformierte System beschreibt, ist diese Betrachtungsweise für die späteren Formulierungen des Gleichgewichts am verformten System von wesentlichem Interesse. Deshalb sind auch für die EULERsche Betrachtungsweise die Zusammenhänge in einem kommutativen Diagramm in Bild 1.5 zusammengefasst.

1.3 Deformation

Nach Einführung der Konfigurationen und der LAGRANGEschen und EULERschen Formulierungen sollen für die weiteren ausschließlich statischen Betrachtungen die Zeit und insbesondere deren Ableitungen, $\vec{v}$ ist die Geschwindigkeit und $\vec{a}$ ist die Beschleunigung, ohne Einfluss auf das Ergebnis sein, d.h.

$$\vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt} \approx \vec{0} \text{ und } \vec{a} = \frac{d^2\vec{x}}{dt^2} \approx \vec{0}. \tag{1.14}$$

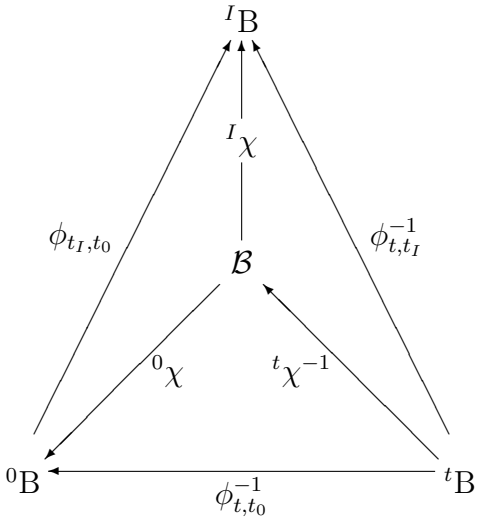


Bild 1.5: Vereinfachte EULERsche Darstellung

Auf die in Abschnitt 1.1 eingeführte Indizierung wird daher bei den weiteren Betrachtungen verzichtet, sofern die Eindeutigkeit erhalten bleibt.

Die in Gleichung 1.1 angegebene Darstellung des Vektors $\vec{x}$ als Linearkombination der Basisvektoren $\vec{e_i}$ wird im einfachsten Fall für Referenz-, geometrisch imperfekte und Momentankonfigurationen bezüglich der gleichen kartesischen Basis **E** angewendet. Dann beschränkt sich die Transformation zwischen den Basen auf das Kroneckersymbol

$$\delta_{MR} = \vec{e}_M \cdot \vec{e}_R, \tag{1.15}$$

wobei der Index R auf die Referenz- und der Index M auf die Momentankonfiguration verweist. Die Verschiebung eines Punktes $\mathcal{M}$ wird dann durch den Vektor $\vec{u}$ in der Form

$$\vec{u} = \vec{x} - \vec{X} = (\delta_{MR} x^M - X^R)\vec{e}_R \tag{1.16}$$

beschrieben. Durch zyklisches Vertauschen ergeben sich dann die Gleichungen für $^I\vec{u}$ zu

$$^I\vec{u} = \vec{x} - {}^I\vec{X} = (\delta_{Mi} x^M - X^i)\vec{e}_i \tag{1.17}$$

und für $\vec{i}$ zu

$$\vec{i} = {}^I\vec{X} - \vec{X} = (\delta_{iR} X^i - X^R)\vec{e}_R. \tag{1.18}$$

Es sei hier nochmal darauf hingewiesen, dass der Vektor $\vec{i}$ keine Deformation beschreibt und an dieser Stelle nur der Vollständigkeit wegen aufgeführt wird. Bild 1.6 zeigt die drei Verschiebungsvektoren und die zugehörigen Komponenten.

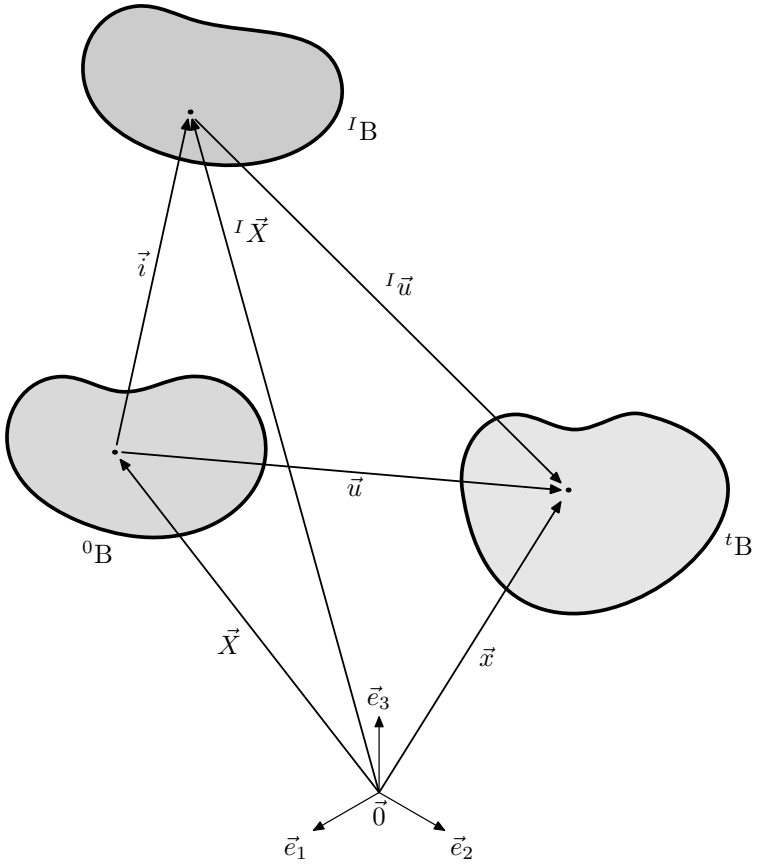


Bild 1.6: Verschiebungsvektoren der Gleichungen 1.16, 1.17 und 1.18

Konvektive Koordinaten

Für die im folgenden durchgeführten Betrachtungen ist es hilfreich, zusätzlich zu der kartesischen Basis $\mathbf{E}$ konvektive Basen $\mathbf{G}$, $\mathbf{g}$ und $^I\mathbf{G}$ einzuführen. Diese Basen werden an einen Punkt des Körpers angeheftet und verbleiben an diesem Punkt während des gesamten Bewegungsvorganges. Die Basisvektoren $\vec{G}_i$ der Referenz-, $\vec{g}_i$ der Momentan- und $^I\vec{G}_i$ der geometrisch imperfekten Konfigurationen können bezüglich der Parameterlinien θ^i, wie in Bild 1.7 exemplarisch für die Referenz- und die Momentankonfigurationen dargestellt, in der Form

$$\vec{G}_i = \frac{\partial \vec{X}}{\partial \theta^i} = \vec{X}_{,i} \tag{1.19}$$

$$\vec{g}_i = \frac{\partial \vec{x}}{\partial \theta^i} = \vec{x}_{,i} \tag{1.20}$$

$$^I\vec{G}_i = \frac{\partial {}^I\vec{X}}{\partial \theta^i} = \frac{\partial (\vec{X} + \vec{i})}{\partial \theta^i} = \frac{\partial \vec{X}}{\partial \theta^i} + \frac{\partial \vec{i}}{\partial \theta^i} = \vec{X}_{,i} + \vec{i}_{,i} = {}^I\vec{X}_{,i} \tag{1.21}$$

angegeben werden.

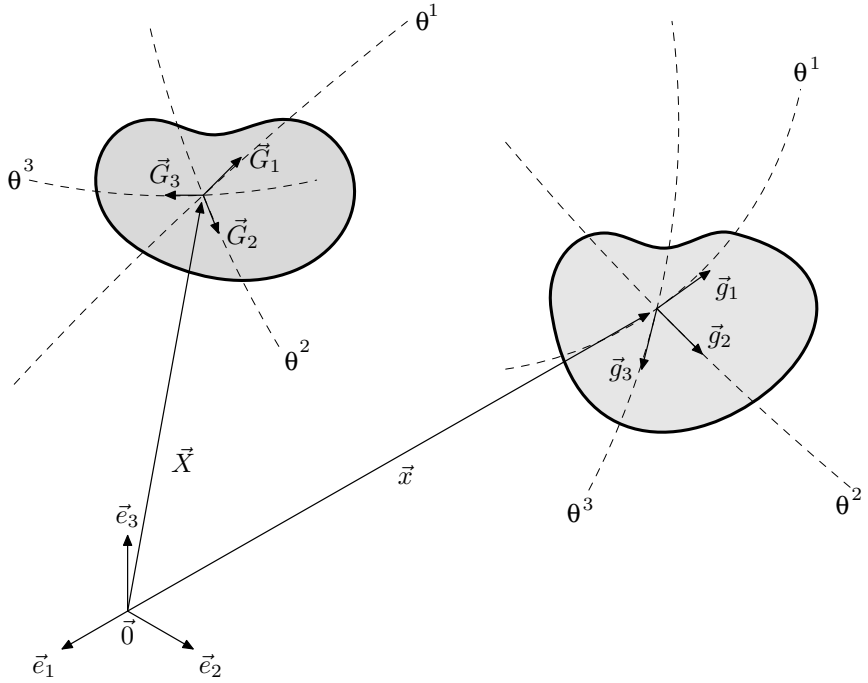


Bild 1.7: Parameterlinien und konvektive Basen

1.3.1 Deformationsgradient

Die Lage- und Formänderung eines differentiellen Elementes $d\vec{X}$ in ein differentielles Element $d\vec{x}$ wird durch die lineare Abbildung $d\vec{x} = \mathbf{F}d\vec{X}$ beschrieben. $d\vec{X}$ sei die Metrik zweier Punkte in der Umgebung $U({}^0B)$ und $d\vec{x}$ sei die Metrik derselben Punkte in der Umgebung $U({}^tB)$. Dabei enthält die Koeffizientenmatrix $\mathbf{F}$ alle partiellen Ableitungen der Koordinaten der Momentankonfiguration nach den Koordinaten der Referenzkonfiguration. $\mathbf{F}$ ist ein zweistufiger Tensor mit

$$\mathbf{F} = \nabla\vec{x} = \mathbf{Grad}\ \vec{x} = \frac{\partial\vec{x}}{\partial\vec{X}} = (\vec{g}_k \otimes \vec{G}^k) \tag{1.22}$$

und wird als materieller Deformationsgradient bezeichnet. In matrizieller Form stellt sich die Beziehung der beiden Metriken wie folgt dar

$$\begin{pmatrix} dx^1 \\ dx^2 \\ dx^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial X^1} & \frac{\partial x^1}{\partial X^2} & \frac{\partial x^1}{\partial X^3} \\ \frac{\partial x^2}{\partial X^1} & \frac{\partial x^2}{\partial X^2} & \frac{\partial x^2}{\partial X^3} \\ \frac{\partial x^3}{\partial X^1} & \frac{\partial x^3}{\partial X^2} & \frac{\partial x^3}{\partial X^3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dX^1 \\ dX^2 \\ dX^3 \end{pmatrix}. \tag{1.23}$$

Der materielle Deformationsgradient $\mathbf{F}$ kann jedoch mit Gleichung 1.16 auch in der nicht mehr linearen Form

$$\mathbf{F} = \nabla(\vec{X} + \vec{u}) = \mathbf{Grad}\ (\vec{X} + \vec{u}) = \mathbf{1} + \mathbf{Grad}\ \vec{u} = \mathbf{1} + \nabla\vec{u} = \mathbf{1} + \mathbf{H} \tag{1.24}$$

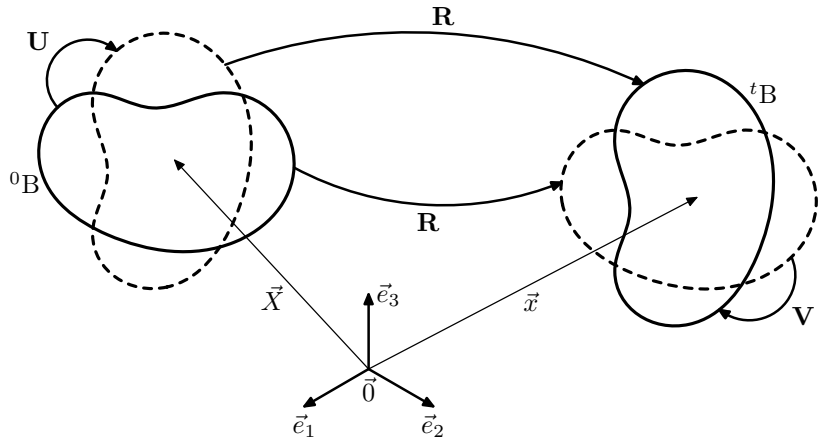


Bild 1.8: Aufspaltung des Deformationsgradienten

geschrieben werden. **H** ist dann der materielle Verschiebungsgradient. Der materielle Deformationsgradient kann polar in einen orthogonalen Drehtensor **R** und einen symmetrischen Strecktensor wie folgt

$$\begin{aligned}\mathbf{F} = \mathbf{IF} = (\mathbf{FF}^{-1})^T\mathbf{F} = (\mathbf{F}^{-1})^T\mathbf{F}^T\mathbf{F} = \\ = (\mathbf{F}^{-1})^T\mathbf{U}^2 = ((\mathbf{F}^{-1})^T\mathbf{U})\mathbf{U} = \mathbf{RU}\end{aligned} \tag{1.25}$$

bzw.

$$\begin{aligned}\mathbf{F} = \mathbf{FI} = \mathbf{F}(\mathbf{F}^{-1}\mathbf{F})^T = \mathbf{FF}^T(\mathbf{F}^{-1})^T = \\ = \mathbf{V}^2(\mathbf{F}^{-1})^T = \mathbf{V}(\mathbf{V}(\mathbf{F}^{-1})^T)\mathbf{U} = \mathbf{VR}\end{aligned} \tag{1.26}$$

zerlegt werden. In Abhängigkeit von der Zerlegungsreihenfolge wird der Rechtsstrecktensor **U** bzw. Linksstrecktensor **V** eingeführt, siehe auch Bild 1.8. Anschaulich besteht jede Deformation aus einer Rotation und einer Verzerrung. Mit Gleichung 1.24 wird sofort die Richtungsabhängigkeit von **F** klar. Es erscheint daher sinnvoll für die Beschreibung der Deformation einen richtungsunabhängigen, symmetrischen Tensor einzuführen.

1.3.2 Verzerrungstensor

Ausgangspunkt für die Beschreibung des Verzerrungstensors ist das Quadrat des in Gleichung 1.25 angegebenen Rechtsstrecktensors **U**, der symmetrisch und positiv definit ist. Nun kann exemplarisch der GREENsche Verzerrungstensor

$$\mathbf{E}^{(G)} := \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T\mathbf{F} - \mathbf{1}) = \frac{1}{2}(\mathbf{U}^2 - \mathbf{1}) = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{1}) \tag{1.27}$$

oder bezüglich der konvektiven Basen

$$\begin{aligned}\mathbf{E}^{(G)} &= \frac{1}{2}[g_{ik}(\vec{G}^i \otimes \vec{G}^k) - G_{ik}(\vec{G}^i \otimes \vec{G}^k)] \\ &= \gamma_{ik}(\vec{G}^i \otimes \vec{G}^k)\end{aligned} \tag{1.28}$$

mit den Verzerrungskomponenten

$$\gamma_{ik} = \frac{1}{2}(g_{ik} - G_{ik}) \tag{1.29}$$

hingeschrieben werden. Dieser Tensor gibt das Verzerrungsmaß bezüglich der Referenzkonfiguration an. Der Tensor $\mathbf{C}$ wird auch als Rechts-Cauchy-Green-Tensor bezeichnet. Der Hintergrund für Gleichung 1.27 kann z.B. bei Barthold in [4] nachgelesen werden. Eine anschauliche Herleitung des Greenschen Verzerrungstensors über die Differenz der Quadrate der Linienelemente in der Referenz- und Momentankonfiguration geben Stein und Barthold in [54] an. Eine andere Darstellung ist durch den in Gleichung 1.24 eingeführten materiellen Verschiebungsgradienten $\mathbf{H}$ wie folgt

$$\begin{aligned}\mathbf{E}^{(G)} &:= \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T\mathbf{F} - \mathbf{1}) = \frac{1}{2}((\mathbf{1} + \mathbf{H}^T)(\mathbf{1} + \mathbf{H}) - \mathbf{1}) \\ &= \frac{1}{2}(\mathbf{H} + \mathbf{H}^T + \mathbf{H}^T\mathbf{H}) \\ &= \mathbf{E}^{(G)}_{LIN} + \mathbf{E}^{(G)}_{NLIN}\end{aligned} \tag{1.30}$$

gegeben. Dabei beschreibt $\mathbf{E}^{(G)}_{LIN}$ den linearen und $\mathbf{E}^{(G)}_{NLIN}$ den nichtlinearen Anteil des Verzerrungstensors.

1.4 Spannungen

Auf den Körper $\mathcal{B}$ wirken mechanische Belastungen ein. Diese werden streng in Körper- oder Volumenlasten und Oberflächenlasten unterschieden. Dabei treten sowohl Kräfte als auch Momente auf. Im Rahmen der klassischen Kontinuumsmechanik werden nur die Kräfte berücksichtigt. Auftretende Momente können aber durch Auflösung in äquivalente Kräftepaare integriert werden.

Restriktion 1: Als Belastung des Körpers werden nur Oberflächenkräfte zugelassen.

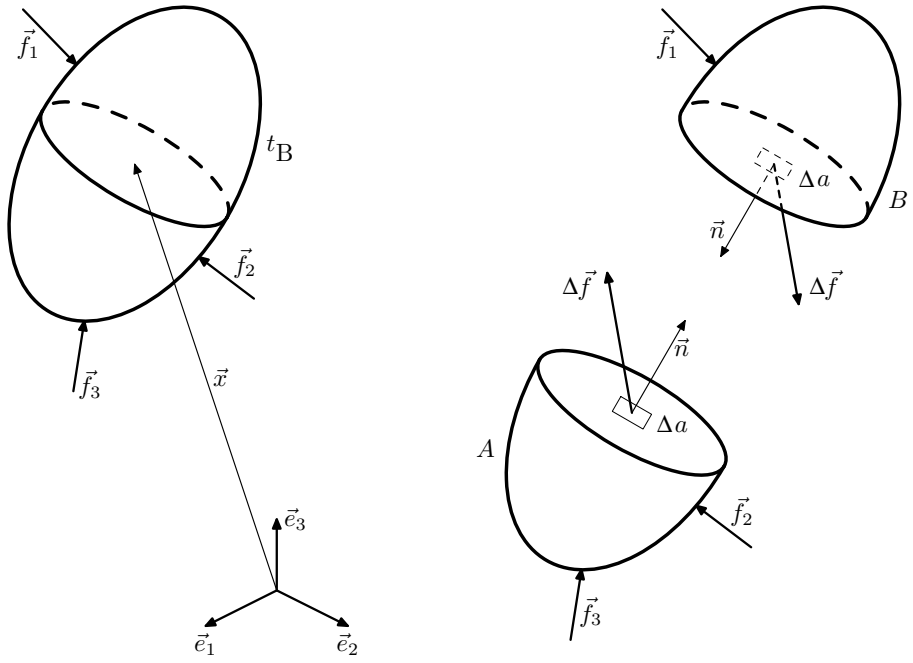


Bild 1.9: Zerlegung in Teilkörper

Oberflächenkräfte können sowohl äußere als auch innere Beanspruchungen sein. Äußere Kräfte sind dabei die Einwirkungen auf den Körper $\mathcal{B}$. Die inneren Kräfte sind nicht sichtbar, können aber durch das Zerschneiden des Körpers $\mathcal{B}$ durch den Punkt $\vec{x}$ in der Momentankonfiguration ${}^t\mathrm{B}$ in zwei Teile A und B sichtbar gemacht werden, siehe Bild 1.9. Der Schnitt erfolge längs einer Ebene mit der Normalen $\vec{n}(\vec{x})$. Werden die äußeren bzw. inneren Kräfte auf Flächen bezogen, entstehen Spannungsvektoren $\vec{t}(\vec{x},\vec{n})$, die durch folgenden Grenzwert definiert sind

$$\vec{t}(\vec{x},\vec{n}) = \frac{d\vec{f}}{d\mathbf{a}} = \lim_{\triangle\mathbf{a}\to 0} \frac{\triangle\vec{f}}{\triangle a}. \tag{1.31}$$

Dabei ist $\triangle\vec{f}$ der auf die Oberfläche $\triangle\mathbf{a} = \vec{n}\triangle a$ entfallende resultierende Kraftvektor

$$d\vec{f}(\vec{x}) = \vec{t}(\vec{x},\vec{n})da. \tag{1.32}$$

1.4.1 Cauchyscher Spannungstensor

In jedem Punkt $\vec{x}$ des Körpers $\mathcal{B}$ gilt das Cauchysche Lemma

$$\vec{t}(\vec{n}) = -\vec{t}(-\vec{n}), \tag{1.33}$$

d.h. die Aktion des Teilkörpers A auf den Teilkörper B ist gleich der Reaktion des Teilkörpers B auf den Teilkörper A. Der Vektor $\vec{t}$ wird als Cauchyscher Spannungsvektor bezeichnet und ist auf die Momentankonfiguration bezogen. In einem Punkt

$\vec{x}$ können beliebig viele dieser Schnitte, die durch den Normalenvektor $\vec{n}(\vec{x})$ definiert sind, geführt werden. Zu jedem dieser Schnitte gehört ein Spannungsvektor $\vec{t}(\vec{x},\vec{n})$. Die Menge dieser Spannungsvektoren beschreibt den Spannungszustand im Punkt $\vec{x}$. ALTENBACH zeigt in [1], dass es zur eindeutigen Beschreibung des Spannungszustandes im Punkt $\vec{x}$ genügt, 3 Spannungsvektoren bezüglich nichtkomplanarer Schnittflächen durch den Punkt $\vec{x}$ zu betrachten. Damit kann das CAUCHYsche Fundamentaltheorem

$$\vec{t}(\vec{x},\vec{n}) = \mathbf{T}(\vec{x})\vec{n} \tag{1.34}$$

aufgestellt werden. Der symmetrische Tensor

$$\mathbf{T} = \tau^{ik}(\vec{g}_i \otimes \vec{g}_k) \tag{1.35}$$

heißt CAUCHYscher Spannungstensor und wird, wie auch der CAUCHYsche Spannungsvektor, in EULERschen Koordinaten angegeben.

1.4.2 Piola-Kirchhoff Spannungstensoren

Wird nun die Darstellung in LAGRANGEschen Koordinaten benötigt, muss die Transformationsbeziehung

$$d\mathbf{a} = \det\mathbf{F}(\mathbf{F}^{-1})^T d\mathbf{A} \tag{1.36}$$

berücksichtigt werden. Gleichung 1.34 und Gleichung 1.36 in Gleichung 1.32 eingesetzt

$$\begin{aligned} d\vec{f} &= \vec{t}(\vec{n})d\mathbf{a} = \mathbf{T}\vec{n}da = \mathbf{T}d\mathbf{a} \\ &= \mathbf{T}\det\mathbf{F}(\mathbf{F}^{-1})^T d\mathbf{A} := \mathbf{P}d\mathbf{A} = \mathbf{P}\vec{N}dA \end{aligned} \tag{1.37}$$

führt direkt auf den 1. PIOLA-KIRCHHOFFschen Spannungstensor

$$\mathbf{P} = \pi^{ik}(\vec{g}_i \otimes \vec{G}_k) \text{ mit } \pi^{ik} = \sqrt{\frac{g}{G}}\tau^{ik} \tag{1.38}$$

Die $d\mathbf{A}$ und $d\mathbf{a}$ in Gl. 1.37 sind Flächenelemente in den Referenz- bzw. geometrisch imperfekten und der Momentankonfigurationen mit den Flächennormalen $\vec{N}$ und $\vec{n}$. Der erste PIOLA-KIRCHHOFFsche Spannungstensor $\mathbf{P}$ ist im allgemeinen nicht symmetrisch. Eine geeignete Modifizierung mittels eines fiktiven Kraftvektors

$$d\vec{F} = \mathbf{F}^{-1}d\vec{f} = \mathbf{F}^{-1}\mathbf{P}d\mathbf{A} = \mathbf{S}d\mathbf{A} \tag{1.39}$$

ergibt den 2. PIOLA-KIRCHHOFFschen Spannungstensor

$$\mathbf{S} = \sigma^{ik}(\vec{G}_i \otimes \vec{G}_k) \text{ mit } \sigma^{ik} = \pi^{ik} \tag{1.40}$$

der dann auch symmetrisch ist und eine direkte Verknüpfung des fiktiven Kraftvektors $\vec{F}$ mit dem Flächenelement $d\mathbf{A}$ darstellt.

1.5 Konstitutive Beziehungen

Alle bisher durchgeführten Betrachtungen waren im wesentlichen unabhängig von der Art des Materials, die einzige Einschränkung bestand in der Definition des Kontinuums. Nun sollen die in Abschnitt 1.3.2 eingeführten Verzerrungen mit den in Abschnitt 1.4 definierten Spannungen verknüpft werden.

Restriktion 2: Bei Beschränkung auf kleine Verzerrungen wird ein linearer Zusammenhang zwischen Spannungen und Verzerrungen vorausgesetzt.

In den Referenz- und geometrisch imperfekten Konfigurationen wird dieser Zusammenhang zwischen dem 2. Piola-Kirchhoffschen Spannungstensor und dem Greenschen Verzerrungstensor in der Form

$$\mathbf{S} = {}^{(4)}\mathbf{C}\mathbf{E}^{(G)} \tag{1.41}$$

hergestellt. Das diesen Zusammenhang beschreibende Material verhält sich nach dem St. Venantschen Werkstoffgesetz. In Komponentenschreibweise folgt

$$\sigma^{ij} = C^{ijkl}\gamma_{kl}. \tag{1.42}$$

1.5.1 Elastizitätstensor

${}^{(4)}\mathbf{C}$ ist eine Tetrade, nach Anhang A.4 also ein Tensor 4. Stufe

$${}^{(4)}\mathbf{C} = C^{ijkl}(\vec{G}_i \otimes \vec{G}_j \otimes \vec{G}_k \otimes \vec{G}_l). \tag{1.43}$$

Die Komponenten C^{ijkl} des Elastizitätstensors ${}^{(4)}\mathbf{C}$ lassen sich für homogene, isotrope und linear-elastische Werkstoffe aus den unabhängigen Werkstoffkonstanten E, den Elastizitätsmodul, und μ, der Querkontraktionszahl, ermitteln. Unter Berücksichtigung der Orthonormalität der Basis $\vec{G}_i$ kann Gleichung 1.42 in der Form

$$\sigma^{ij} = \frac{E}{1+\mu}\gamma_{ij} + \frac{E\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)}\delta_{ij}\ \mathrm{spur}(\mathbf{E}^{(G)}) \tag{1.44}$$

geschrieben werden. Unter Ausnutzung der symmetrischen Eigenschaften des Spannungstensors und des Verzerrungstensors können diese als Spaltenmatrizen angegeben werden:

$$\vec{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma^{11} \\ \sigma^{22} \\ \sigma^{33} \\ \sigma^{12} \\ \sigma^{23} \\ \sigma^{13} \end{pmatrix} \text{ und } \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} \gamma_{11} \\ \gamma_{22} \\ \gamma_{33} \\ 2\gamma_{12} \\ 2\gamma_{23} \\ 2\gamma_{13} \end{pmatrix}. \tag{1.45}$$

Hierbei ist zu beachten, dass bei der Definition der Spaltenmatrix $\vec{\gamma}$ die doppelten Verzerrungen auftreten. Die Elastizitätsmatrix $\mathbf{C}$ enthält dann nur noch $6^2 = 36$ statt $3^4 = 81$ Komponenten und hat die Form

$$\mathbf{C} = \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)} \begin{pmatrix} 1-\mu & \mu & \mu & 0 & 0 & 0 \\ \mu & 1-\mu & \mu & 0 & 0 & 0 \\ \mu & \mu & 1-\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2} \end{pmatrix}. \tag{1.46}$$

1.6 Feldgleichungen

Stein und Barthold geben in [54], ausgehend von der Massenbilanz und der Impuls- und Drallerhaltungssätze, als Sonderfall der dynamischen die statische Feldgleichung an:

$$\mathrm{div}\mathbf{T} + \vec{k} = \vec{0} \quad \forall \vec{x} \in {}^t\mathrm{B}. \tag{1.47}$$

Diese Gleichung wird auch als 1. Cauchysche Bewegungsgleichung bezeichnet und gibt die statischen Gleichgewichtsbedingungen in der Momentankonfiguration an. Der Anteil $\vec{k}$ repräsentiert dabei die Volumenkräfte. Eine weitere Bewegungsgleichung kann durch Zerlegung des Cauchyschen Spannungstensors in einen symmetrischen und einen schiefsymmetrischen Tensor hergeleitet werden. Es gilt in Komponentenschreibweise

$$\begin{aligned} \mathbf{T} = \tau^{ik}(\vec{g}_i \otimes \vec{g}_k) &= \frac{1}{2}\tau^{ik}(\vec{g}_i \otimes \vec{g}_k + \vec{g}_k \otimes \vec{g}_i) + \frac{1}{2}\tau^{ik}(\vec{g}_i \otimes \vec{g}_k - \vec{g}_k \otimes \vec{g}_i) \\ &= \frac{1}{2}\tau^{ik}(\vec{g}_i \otimes \vec{g}_k + \vec{g}_k \otimes \vec{g}_i) + \frac{1}{2}\tau^{ik}(\vec{g}_i \times \vec{g}_k). \end{aligned} \tag{1.48}$$

Der zweite Teil der Summe in Gleichung 1.48 beschreibt das Momentengleichgewicht in $\mathcal{B}$. Als Vektor

$$2\vec{t}^M = \tau^{ik}(\vec{g}_i \times \vec{g}_k) = \vec{0} \quad \forall \vec{x} \in {}^t\mathrm{B} \tag{1.49}$$

dargestellt, wird das Momentengleichgewicht auch als 2. Cauchysche Bewegungsgleichung bezeichnet. Der Vektor $\vec{t}^M$ ist dabei der axiale Vektor des Cauchyschen Spannungstensors. Ist $\mathbf{T}$ symmetrisch, das ist die Grundlage des Boltzmannschen Axioms, und nur dann, so muss der Vektor $\vec{t}^M$, wie in Gleichung 1.49 angegeben, null sein. Leigh zeigt in [35], analog zum Spannungsvektor, die Herleitung der 2. Cauchyschen Bewegungsgleichung mit Hilfe des Momentenvektors $\vec{m}$ und gibt folgende Gleichgewichtsbedingung an:

$$\mathrm{div}\mathbf{M} + \vec{r} = 2\vec{t}^M \quad \forall \vec{x} \in {}^t\mathrm{B}. \tag{1.50}$$

$\mathbf{M}$ ist dabei der Momententensor, $\vec{r}$ beschreibt die Volumenmomente. Der Momententensor und die Volumenmomente können erst durch polare Kontinua beschrieben werden. Für nichtpolare (klassische) Kontinua vereinfacht sich die 2. CAUCHYsche Bewegungsgleichung zu

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}^T. \tag{1.51}$$

Dies entspricht direkt der Voraussetzung für die Gültigkeit des BOLTZMANN-schen Gesetzes, das sich für $\mathbf{M} = \vec{0}$ und $\vec{r} = \vec{0}$ folgt $\vec{t}^M = \vec{0}$ direkt aus Gleichung 1.47 ergibt.

Die Transformation der Feldgleichungen 1.47 und 1.49 auf die Referenzkonfiguration, unter Verwendung des in Gleichung 1.38 eingeführten 1. PIOLA-KIRCHHOFF-schen Spannungstensors $\mathbf{P}$, liefert

$$\mathrm{Div}\mathbf{P} + \vec{K} = \vec{0} \quad \forall \vec{X} \in {}^0\mathrm{B} \tag{1.52}$$

$$2\vec{T}^M = \pi^{ik}(\vec{g}_i \times \vec{G}_k) = \vec{0} \quad \forall \vec{x} \in {}^0\mathrm{B} \tag{1.53}$$

und bei Verwendung des in Gleichung 1.40 definierten 2. PIOLA-KIRCHHOFFschen Spannungstensors $\mathbf{S}$

$$\mathrm{Div}(\mathbf{FS}) + \vec{K} = \vec{0} \quad \forall \vec{X} \in {}^0\mathrm{B} \tag{1.54}$$

$$2\vec{T}^M = \sigma^{ik}(\vec{G}_i \times \vec{G}_k) = \vec{0} \quad \forall \vec{x} \in {}^0\mathrm{B}. \tag{1.55}$$

Die Gleichungen 1.52 bis 1.55 gelten für die geometrisch imperfekte Konfiguration analog. Es müssen dann die Basen $\vec{G}$ durch ${}^I\vec{G}$ und die Bezugsräume ${}^0\mathrm{B}$ durch ${}^I\mathrm{B}$ ersetzt werden.

Randbedingungen

Sei $\partial\mathcal{B}$ der Rand des Körpers $\mathcal{B}$. Weiterhin gelte $\partial\mathcal{B}_u$ sei der Rand mit vorgegebenen Verschiebungen, $\partial\mathcal{B}_\sigma$ sei der Rand mit vorgegebenen Spannungen,

$$\partial\mathcal{B}_u \cup \partial\mathcal{B}_\sigma = \partial\mathcal{B} \text{ und } \partial\mathcal{B}_u \cap \partial\mathcal{B}_\sigma = \emptyset, \tag{1.56}$$

dann können geometrische und statische Randbedingungen angegeben werden. Für die Momentankonfiguration ergeben sich als geometrische Randbedingung

$$\vec{u}(\vec{x}) = \hat{\vec{u}} \quad \forall \vec{x} \in \partial^t\mathrm{B_u} \tag{1.57}$$

und als statische Randbedingung

$$\vec{t} = \hat{\vec{t}} \quad \forall \vec{x} \in \partial^t\mathrm{B}_\sigma. \tag{1.58}$$

$\hat{\vec{t}}$ beschreibt dabei eine Oberflächenspannung in EULERscher Darstellung bezogen auf die Momentankonfiguration. In LAGRANGEscher Darstellung bezüglich der Referenz- und geometrisch imperfekten Konfigurationen folgen die Randbedingungen zu

$$\vec{u}(\phi_{t,t_0}(\vec{X})) = \vec{u}(\phi_{t,t_I}({}^I\vec{X})) = \hat{\vec{u}} \quad \forall \vec{x} \in \partial^0\mathrm{B_u} \vee \partial^\mathrm{I}\mathrm{B_u} \tag{1.59}$$

und

$$\begin{aligned} \vec{T} &= \hat{\vec{T}} \quad \forall \vec{X} \in \partial^0\mathrm{B}_\sigma \\ {}^I\vec{T} &= {}^I\hat{\vec{T}} \quad \forall {}^I\vec{X} \in \partial^I\mathrm{B}_\sigma. \end{aligned} \tag{1.60}$$

1.7 Prinzip der virtuellen Arbeit

Beim Prinzip der virtuellen Arbeit werden für die Darstellung bezüglich der Referenzkonfiguration in den Gleichungen 1.52 und 1.60 virtuelle Verrückungen $\delta\vec{u}$ eingeführt:

$$\begin{aligned} \mathrm{Div}\mathbf{P}\delta\vec{u} &= 0 \quad \forall \vec{X} \in {}^0\mathrm{B} \\ (\hat{\vec{T}} - \vec{T})\delta\vec{u} &= 0 \quad \forall \vec{X} \in \partial^0\mathrm{B_u}. \end{aligned} \tag{1.61}$$

In Gleichung 1.61 werden nach Restriktion 1 die Volumenkräfte $\vec{K}$ vernachlässigt. Die Integration über das Volumen bzw. die Oberfläche des Körpers zur Referenzzeit $t = t_0$ liefert die virtuelle Arbeit

$$\delta W = \int_{{}^0\mathrm{B}} \mathrm{Div}\mathbf{P}\delta\vec{u}dV + \int_{\partial^0\mathrm{B}} (\hat{\vec{T}} - \vec{T})\delta\vec{u}dA = 0. \tag{1.62}$$

Das Volumenintegral kann mit

$$(\mathrm{Div}(\mathbf{P}))\delta\vec{u} = \mathrm{Div}(\mathbf{P}^T\delta\vec{u}) - \mathbf{P}\cdot\mathrm{Grad}\delta\vec{u} \tag{1.63}$$

und dem GAUSSschen Integralsatz unter Berücksichtigung des CAUCHYschen Fundamentaltheorems umgeformt werden:

$$\delta W = -\int_{{}^0\mathrm{B}} \mathbf{P}\cdot\mathrm{Grad}\delta\vec{u}dV + \int_{\partial^0\mathrm{B}} \hat{\vec{T}}\delta\vec{u}dA. \tag{1.64}$$

Wird nun eine Aufteilung in eine innere Arbeit

$$\delta W_i = \int_{{}^0\mathrm{B}} \mathbf{P}\cdot\mathrm{Grad}\delta\vec{u}dV \tag{1.65}$$

und eine äußere Arbeit

$$\delta W_a = \int_{\partial^0\mathrm{B}} \hat{\vec{T}}\delta\vec{u}dA \tag{1.66}$$

vorgenommen, folgt das bekannte Prinzip

$$\delta W_i = \delta W_a. \tag{1.67}$$

Werden in Gleichung 1.65 die Beziehungen 1.39 und 1.24 unter Berücksichtigung der konstitutiven Gleichung 1.41 eingesetzt, folgt

$$\begin{aligned}\delta W_i &= \int_{{}^0\mathrm{B}} \mathbf{F}\mathbf{S} \cdot \delta\mathbf{H} dV = \int_{{}^0\mathrm{B}} \mathbf{S} \cdot \frac{1}{2}\delta(\mathbf{F}^T\mathbf{F} - \mathbf{1}) dV \\ &= \int_{{}^0\mathrm{B}} \mathbf{S} \cdot \delta\mathbf{E}^{(G)} dV := \delta\Pi_i.\end{aligned} \tag{1.68}$$

Die innere virtuelle Arbeit lässt sich auch als Variation eines Energiefunktionals darstellen, mit

$$\Pi_i = \int_V \overset{3}{\pi}_i \, dV \tag{1.69}$$

als volumenspezifischer Formänderungsenergie. $\overset{3}{\pi}_i$ kann als Bilinearform in den Verzerrungen dargestellt werden

$$\overset{3}{\pi}_i = \frac{1}{2}{}^{(4)}\mathbf{C} \cdot (\vec{G} \otimes \vec{G}) = \frac{1}{2} C^{ijkl} \gamma_{ij} \gamma_{kl}. \tag{1.70}$$

Gleichung 1.44 ergibt sich nun als Variation des Energiefunktionals zu

$$\mathbf{S} = \frac{\partial \pi_{(i)}(\mathbf{E}^{(G)})}{\partial \mathbf{E}^{(G)}}. \tag{1.71}$$

Kapitel 2

Cosserat-Kontinuum

Als konsistente Fortsetzung der im vorangegangenen Kapitel beschriebenen Kinematik des Boltzmann-Kontinuums, werden jetzt jedem materiellen Punkt, zusätzlich zu den in Kapitel 1 betrachteten drei Verschiebungskinematen, drei Drehkomponenten als kinematische Variable zugeordnet. Realisiert werden diese kinematisch Unabhängigen durch starre Dreibeine, auch Direktoren genannt.

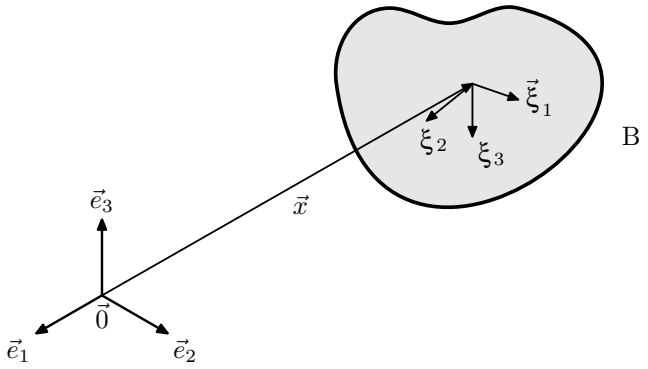


Bild 2.1: Menge materieller Punkte $\mathcal{M}$ mit Direktoren

Die Einbettung der Menge materieller Punkte $\mathcal{M}$ in den Euklidischen $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{E}^3$ erfolgt wie in Kapitel 1 durch Wahl einer zeitlich invarianten kartesischen Basis $\mathbf{E} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$. Weiterhin wird jedem Punkt eine orthogonale punktfeste Basis $\mathbf{\Xi} = \{\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2, \vec{\xi}_3\}$ zugeordnet (siehe hierzu Bild 2.1). Diese Menge gerichteter Punkte beschreibt ein polares Kontinuum und wird als Cosserat-Kontinuum, nach den Gebrüdern Cosserat (1896), bezeichnet.

Eine anschauliche Darstellung der Cosseratschen Theorien, mit der Einschränkung auf lineare Deformationen, gelang Günther in [21]. Schaefer gibt in [52] eine Zusammenfassung zum Stand der Wissenschaft im Bereich der polaren Kontinua, speziell der Cosseratschen.

2.1 Konfigurationen des einparametrigen Kontinuums

In diesem Abschnitt wird der materielle Körper $\mathcal{B}$ mit speziellen Eigenschaften versehen. Dieses Kontinuum sei der ebenfalls dreidimensionale Stab $\mathcal{S}$. Zur Einbettung dieses Körpers in den EUKLIDischen Vektorraum wird der Stab durch eine Raumkurve, die als Schnittmenge zweier Flächen definiert ist, beschrieben. Diese Raumkurve sei die Stabachse

$$\mathsf{S}(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) \in F_1 \cap F_2 \text{ mit } F_1(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) = 0 \text{ und } F_2(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) = 0. \tag{2.1}$$

Alle Punkte des Stabes $\mathcal{S}$ mit dem Volumen V sollen bezüglich der Stabachse S in der Form

$$\forall \vec{X} \notin \mathsf{S}(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) \; \exists \; f : \vec{X} \mapsto \vec{X}(\vec{S}) \text{ mit } \vec{S} \in \mathsf{S}(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) \tag{2.2}$$

beschreibbar sein. Dabei wird jedem Punkt $\vec{S}$ dieser Kurve eine orthogonale konvektive Basis, siehe Bild 1.7, $\mathbf{G} = \{\vec{G}_1, \vec{G}_2, \vec{G}_3\}$ derart zugeordnet, dass $\vec{G}_3$ tangential an S und normal zur Ebene Q liegt. Q beschreibt in den Referenz- und geometrisch imperfekten Konfigurationen die Ausdehnungen des Stabes senkrecht zu seiner Achse, die klein gegenüber der Ausdehnung der Stabachse, der Länge L, sein sollen. Q wird als Querschnitt bezeichnet und in der Referenzkonfiguration durch $\vec{G}_1, \vec{G}_2$ beschrieben. Die Abbildung in Gleichung 2.2 kann nun angegeben werden:

$$f : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ \vec{X} & \mapsto & \vec{X}(\vec{S}) = \vec{S} + \theta^1 \vec{G}_1 + \theta^2 \vec{G}_2. \end{array} \right. \tag{2.3}$$

$\vec{S}$ wird auch als Schwerpunkt des Querschnitts Q bezeichnet. Die Oberfläche $\partial\mathsf{S}$ des Stabes S sei die Fläche A. Mit der Einführung weiterer punktfester orthogonaler Basen $\boldsymbol{\Xi} = \{\vec{\Xi}_1, \vec{\Xi}_2, \vec{\Xi}_3\}$ die in den Referenz- und geometrisch imperfekten Konfigurationen mit den konvektiven Basen übereinstimmen

$$\vec{\Xi}_i \equiv \vec{G}_i \text{ bzw. } {}^I\vec{\Xi}_i \equiv {}^I\vec{G}_i, \tag{2.4}$$

siehe hierzu Bild 2.2, kann das dreidimensionale Stabkontinuum auf ein eindimensionales reduziert werden. Die Basisvektoren $\vec{\Xi}_\alpha$ für $\alpha = 1, 2$ werden nach den COSSERATs auch als Direktoren bezeichnet, da sie eine Orientierung der Punkte der Stabachse S vermitteln. An dieser Stelle sollen nun Annahmen getroffen werden, die für die weiteren Betrachtungen erhebliche Vereinfachungen bewirken. Es ist hierbei zu beachten, dass jede Annahme eine Einschränkung der Verwendbarkeit der hergeleiteten Theorie darstellt und in jedem Falle kritisch hinterfragt werden muss.

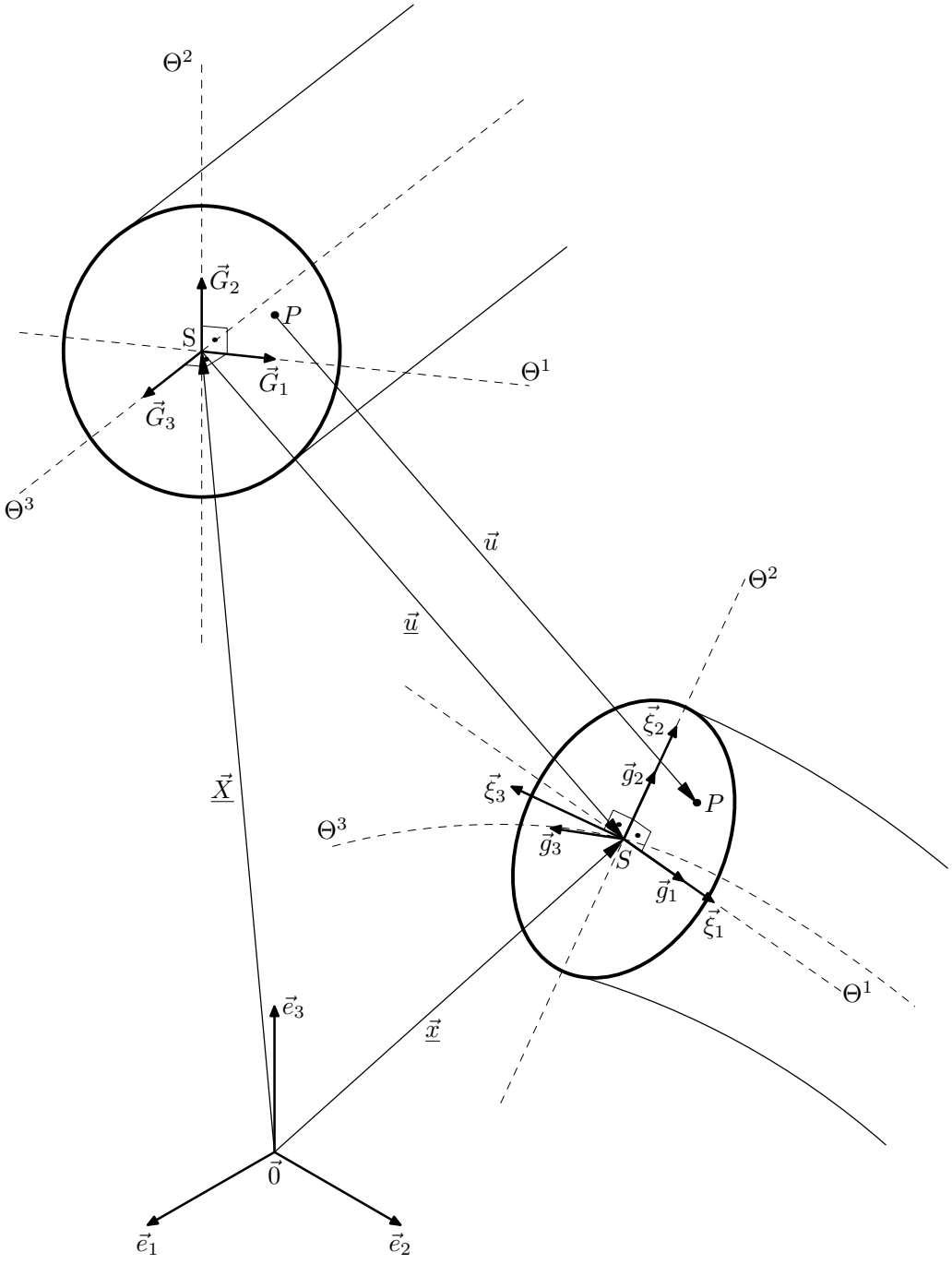


Bild 2.2: Stabkonfigurationen

Restriktion 3: Die Raumkurve der Stabachse kann abschnittsweise durch Geraden approximiert werden, d.h. alle Stababschnitte sind in den Referenz- und geometrisch imperfekten Konfigurationen gerade.

Restriktion 4: Die Querschnitte Q sind sowohl in den Referenz- und geometrisch imperfekten Konfigurationen als auch in der Momentankonfiguration eben (Bernoulli), d.h. die Abbildungen ϕ_{t,t_0} und ϕ_{t,t_I} in den Gleichungen 1.10 und 1.11 bilden die ebenen Querschnitte ${}^0\mathsf{Q}$ bzw. ${}^I\mathsf{Q}$ auf den ebenen Querschnitt ${}^t\mathsf{Q}$ ab.

Restriktion 5: Die Querschnittsform bleibt auch nach der Deformation erhalten (de St. Venant), d.h.

$$d(\vec{A},\vec{B}) = \frac{1}{b} d(\vec{a},\vec{b}) \tag{2.5}$$

mit d Metrik des $\mathbb{R}^3$, $b \in \mathbb{R}$, $\vec{A},\vec{B} \in {}^0\mathsf{G}$ und $\vec{a},\vec{b} \in {}^t\mathsf{G}$. Dabei seien ${}^0\mathsf{G}$ und ${}^t\mathsf{G}$ Geraden mit ${}^0\mathsf{G} \subset {}^0\mathsf{Q}$ und ${}^t\mathsf{G} \subset {}^t\mathsf{Q}$.

2.2 Deformation

Nun ist es möglich den Verschiebungsvektor $\vec{u}$ jedes Punktes $\vec{Q} \in {}^0\mathsf{Q}$ in der Form

$$\vec{u} = \underline{\vec{u}} + \theta^\alpha(\underline{\vec{g}}_\alpha - \vec{G}_\alpha) \text{ für } \alpha = 1,2 \tag{2.6}$$

anzugeben, wobei $\underline{\vec{u}}$ den Verschiebungsvektor des Schwerpunktes beschreibt.

Die Abbildung der Basisvektoren $\vec{\Xi}$ auf die Basisvektoren $\vec{\xi}$ erfolgt mit der in Anhang A.5.1 eingeführten Drehmatrix

$$\vec{\xi}_i = R_i^j \vec{\Xi}_j = R_i^j \vec{G}_j \tag{2.7}$$

Weiterhin muss noch der Zusammenhang zwischen den Direktoren $\vec{\xi}_\alpha$ und den konvektiven Basisvektoren $\underline{\vec{g}}_\alpha$ angegeben werden

$$\vec{\xi}_\alpha = \frac{\underline{\vec{g}}_\alpha}{|\underline{\vec{g}}_\alpha|}, |\underline{\vec{g}}_\alpha| = b. \tag{2.8}$$

Damit ergibt sich der Verschiebungsvektor zu

$$\vec{u} = \underline{\vec{u}} + \theta^\alpha(bR_\alpha^j - \delta_\alpha^j)\vec{G}_\alpha \text{ für } \alpha = 1,2. \tag{2.9}$$

2.2.1 Deformationsgradient

Der in Gleichung 1.22 eingeführte Deformationsgradient $\mathbf{F}$ verbindet die konvektiven Basen $\underline{\vec{g}}_i$ und $\vec{G}_i$. Mit $\mathbf{F} = \underline{\mathbf{F}}$ folgt

$$\underline{\vec{g}}_i = \underline{\mathbf{F}}\vec{G}_i. \tag{2.10}$$

Die Basen der Punkte der Stabachse sind dabei über die folgenden Beziehungen gekoppelt

$$\underline{\vec{g}}_\alpha = bR^j_\alpha \vec{\Xi}_j = bR^j_\alpha \vec{G}_j = b\vec{\xi}_\alpha \tag{2.11}$$

$$\underline{\vec{g}}_3 = \underline{\vec{x}}_{,3} = (\delta^j_3 + \underline{u}^j_{,3})\vec{G}_j. \tag{2.12}$$

Dies führt mit der Definition von $\underline{\mathbf{F}}$ analog zu Gleichung 1.22 auf

$$\underline{\mathbf{F}} = b\vec{\xi}_\alpha \otimes \vec{G}^\alpha + \underline{\vec{x}}_{,3} \otimes \vec{G}^3. \tag{2.13}$$

Mit Gleichung A.57, $b = 1$ und der Substitution $\hat{\omega} = \sqrt{1 - \left(\frac{\omega}{2}\right)^2}$ folgt für große Drehungen in Matrizenschreibweise

$$\underline{\mathbf{F}} = \underline{F}^k_i = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{2}(\omega^2\omega^2 + \omega^3\omega^3) & \hat{\omega}\omega^3 + \frac{1}{2}\omega^1\omega^2 & -\hat{\omega}\omega^2 + \frac{1}{2}\omega^1\omega^3 \\ -\hat{\omega}\omega^3 + \frac{1}{2}\omega^1\omega^2 & 1 - \frac{1}{2}(\omega^1\omega^1 + \omega^3\omega^3) & \hat{\omega}\omega^1 + \frac{1}{2}\omega^2\omega^3 \\ \underline{u}^1_{,3} & \underline{u}^2_{,3} & 1 + \underline{u}^3_{,3} \end{pmatrix} \tag{2.14}$$

und bei Berücksichtigung des ersten Terms der Reihenentwicklung, siehe Gleichung A.53,

$$\underline{\mathbf{F}} = \underline{F}^k_i = \begin{pmatrix} 1 & \omega^3 & -\omega^2 \\ -\omega^3 & 1 & \omega^1 \\ u^1_{,3} & u^2_{,3} & 1 + u^3_{,3} \end{pmatrix}. \tag{2.15}$$

Für die weiteren Untersuchungen ist noch die Angabe der Basis eines beliebigen Querschnittspunktes erforderlich:

$$\vec{g}_\alpha = bR^j_\alpha \vec{\Xi}_j = bR^j_\alpha \vec{G}_j = b\vec{\xi}_\alpha \tag{2.16}$$

$$\vec{g}_3 = \vec{x}_{,3} = (\delta^j_3 + \underline{u}^j_{,3} + \theta^\beta bR^j_{\beta,3})\vec{G}_j. \tag{2.17}$$

2.2.2 Verzerrungs- und Krümmungstensor

Ausgehend von dem in Abschnitt 1.3.2 definierten GREENschen Verzerrungstensor ${}^{G}\mathbf{E}$ können die Verzerrungen für jeden beliebigen Querschnittspunkt $\vec{Q} \in \mathsf{Q}$

$$\gamma_{ik} = \frac{1}{2}(g_{ik} - G_{ik}) \tag{2.18}$$

und für Punkte der Stabachse $\vec{S} \in \mathsf{S}$

$$\underline{\gamma}_{ik} = \frac{1}{2}(\underline{g}_{ik} - G_{ik}) \tag{2.19}$$

angegeben werden. Die Metrikkoeffizienten, die mit den Gleichungen 2.10 bis 2.12 und 2.16 bis 2.17 bestimmt werden, ergeben sich zu:

$$\begin{aligned}
G_{ij} &= \delta_{ij} \\
\underline{g}_{\alpha\beta} &= g_{\alpha\beta} = b^2\delta_{\alpha\beta} \\
\underline{g}_{\alpha 3} &= bR^j_\alpha(\delta_{j3} + \underline{u}_{j,3}) \\
\underline{g}_{33} &= (\delta_{j3} + \underline{u}_{j,3})^2 \\
g_{\alpha 3} &= \underline{g}_{\alpha 3} + b\theta^\beta R^j_{\beta,3}R_{j\alpha} \\
g_{33} &= \underline{g}_{33} + 2(\delta_{j3} + \underline{u}_{j,3})\theta^\beta bR^j_{\beta,3} + \theta^\beta\theta^\gamma b^2 R^j_{\beta,3}R_{\gamma j,3}
\end{aligned} \tag{2.20}$$

und daraus die Verzerrungen

$$\begin{aligned}
\gamma_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2}(b^2 - 1)\delta_{\alpha\beta} \\
\gamma_{\alpha 3} &= \underline{\gamma}_{\alpha 3} + \frac{1}{2}b\theta^\beta R^j_{\beta,3}R_{j\alpha} \\
\gamma_{33} &= \underline{\gamma}_{33} + (\delta_{j3} + \underline{u}_{j,3})b\theta^\beta R^j_{\beta,3} + \frac{1}{2}\theta^\beta\theta^\gamma b^2 R^j_{\beta,3}R_{\gamma j,3}.
\end{aligned} \tag{2.21}$$

Nach Einführung des Krümmungstensors

$$\underline{\mathbf{K}} = \underline{\kappa}_{ij} = R^k_{i,3}R_{kj}, \tag{2.22}$$

der die Änderungen der Basen $\vec{\xi}$ und $\vec{\Xi}$ bezüglich θ^3 beschreibt, können die Verzerrungen γ_{ij} beliebiger Querschnittspunkte durch die Verzerrungen $\underline{\gamma}_{ij}$ und die Krümmungen $\underline{\kappa}_{ij}$ der Stabachse beschrieben werden.

$$\begin{aligned}
\gamma_{\alpha 3} &= \underline{\gamma}_{\alpha 3} + \frac{1}{2}b^2\theta^\beta\underline{\kappa}_{\beta\alpha} \text{ mit } \underline{\kappa}_{\beta\alpha} = 0 \text{ für } \alpha = \beta, \\
\gamma_{33} &= \underline{\gamma}_{33} + b\theta^\beta\underline{\kappa}_{\beta 3}R^l_3F_{l3} + \frac{1}{2}b^2\theta^\beta\theta^\gamma\underline{\kappa}_{\beta k}\underline{\kappa}_{\gamma k}
\end{aligned} \tag{2.23}$$

2.3 Prinzip der virtuellen Arbeit

In Abschnitt 1.7 wurden die virtuellen Arbeiten, die innere Arbeit in Gleichung 1.65 und die äußere Arbeit in Gleichung 1.66, für das 3-dimensionale klassische Kontinuum angegeben. Diese müssen bei Berücksichtigung des Momentengleichgewichtes 1.50 noch auf die Stabachse S reduziert werden. Dazu wird die infinitesimale Änderung $\delta\vec{u}$ mit $\vec{u}$ nach Gleichung 2.9 verwendet:

$$\delta\vec{u} = \delta\underline{\vec{u}} + \delta(\theta^\alpha \underline{\vec{g}}_\alpha) \text{ für } \alpha = 1, 2. \tag{2.24}$$

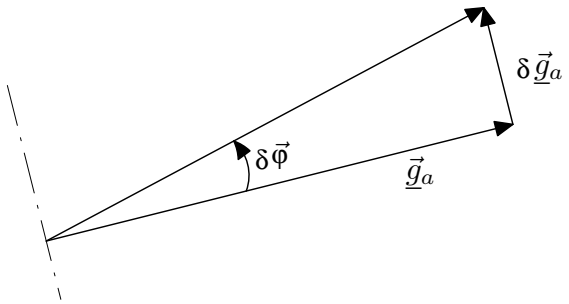


Bild 2.3: Infinitesimale Drehung

Die infinitesimal kleine Änderung $\delta\underline{\vec{g}}_\alpha$ der Basisvektoren $\underline{\vec{g}}_\alpha$ kann nach Bild 2.3 in der Form

$$\delta\underline{\vec{g}}_\alpha = \delta\vec{\varphi} \times \underline{\vec{g}}_\alpha \text{ für } \alpha = 1, 2 \tag{2.25}$$

geschrieben werden.

2.3.1 Innere Arbeit

In Gleichung 1.65 wird der 1. Piola-Kirchhoffsche Spannungstensor $\mathbf{P}$ mit Hilfe des Cauchyschen Fundamentaltheorems durch den Spannungsvektor $\vec{T}$ ausgedrückt. Nun erfolgt die komponentenweise Aufspaltung:

$$\begin{aligned} \delta W_i &= \int_{\mathsf{S}} \mathbf{P} \cdot \mathrm{Grad}\delta\vec{u} d\mathsf{V} \\ &= \int_{\mathsf{S}} \vec{T}^i \delta\vec{u}_{,i} d\mathsf{V} = \int_{\mathsf{S}} \vec{T}^3 \delta\vec{u}_{,3} d\mathsf{V} + \int_{\mathsf{S}} \vec{T}^\alpha \delta\vec{u}_{,\alpha} d\mathsf{V}. \end{aligned} \tag{2.26}$$

Die partiellen Ableitungen der Gleichung 2.24 unter Berücksichtigung der Gleichung 2.25 lauten

$$\begin{aligned} \delta\vec{u}_{,3} &= \delta\underline{\vec{u}}_{,3} + \delta\vec{\varphi}_{,3} \times \theta^\alpha \underline{\vec{g}}_\alpha + \delta\vec{\varphi} \times \theta^\alpha \underline{\vec{g}}_{\alpha,3} \\ \delta\vec{u}_{,\alpha} &= \delta\vec{\varphi} \times \underline{\vec{g}}_\alpha. \end{aligned} \tag{2.27}$$

Mit der Beziehung

$$\vec{T}^{\alpha} \times \vec{g}_{\alpha} = -\vec{T}^{3} \times \underline{\vec{x}}_{,3} - \vec{T}^{3} \times \theta^{\alpha} \underline{\vec{g}}_{\alpha,3} \tag{2.28}$$

die aus dem Momentengleichgewicht in Gleichung 1.53 und den Gleichungen 2.12 und 2.17 resultiert, kann Gleichung 2.26 unter Verwendung der Rechenregel

$$A \cdot (B \times C) = B \cdot (C \times A)$$

umgeschrieben werden:

$$\begin{aligned}
\delta W_i &= \int_{\mathsf{S}} \vec{T}^{3}(\delta \underline{\vec{u}}_{,3} + \delta\vec{\varphi}_{,3} \times \theta^{\alpha} \underline{\vec{g}}_{\alpha} + \delta\vec{\varphi} \times \theta^{\alpha} \underline{\vec{g}}_{\alpha,3}) d\mathsf{V} + \int_{\mathsf{S}} \vec{T}^{\alpha}(\delta\vec{\varphi} \times \underline{\vec{g}}_{\alpha}) d\mathsf{V} \\
&= \int_{\mathsf{S}} \vec{T}^{3} \delta \underline{\vec{u}}_{,3} d\mathsf{V} + \int_{\mathsf{S}} \vec{T}^{3}(\delta\vec{\varphi}_{,3} \times \theta^{\alpha} \underline{\vec{g}}_{\alpha}) d\mathsf{V} + \int_{\mathsf{S}} \vec{T}^{3}(\delta\vec{\varphi} \times \theta^{\alpha} \underline{\vec{g}}_{\alpha,3}) d\mathsf{V} + \\
&+ \int_{\mathsf{S}} -(\vec{T}^{\alpha} \times \underline{\vec{g}}_{\alpha}) \delta\vec{\varphi} d\mathsf{V} \\
&= \int_{\mathsf{S}} \vec{T}^{3} \delta \underline{\vec{u}}_{,3} + \int_{\mathsf{S}} (\theta^{\alpha} \underline{\vec{g}}_{\alpha} \times \vec{T}^{3}) \delta\vec{\varphi}_{,3} d\mathsf{V} - \int_{\mathsf{S}} (\vec{T}^{3} \times \theta^{\alpha} \underline{\vec{g}}_{\alpha,3}) \delta\vec{\varphi} d\mathsf{V} + \\
&+ \int_{\mathsf{S}} \{(\vec{T}^{3} \times \underline{\vec{x}}_{,3}) + (\vec{T}^{3} \times \theta^{\alpha} \underline{\vec{g}}_{\alpha,3})\} \delta\vec{\varphi} d\mathsf{V} \\
&= \int_{\mathsf{S}} \vec{T}^{3} \delta \underline{\vec{u}}_{,3} d\mathsf{V} + \int_{\mathsf{S}} \vec{T}^{3}(\underline{\vec{x}}_{,3} \times \delta\vec{\varphi}) d\mathsf{V} + \int_{\mathsf{S}} (\theta^{\alpha} \underline{\vec{g}}_{\alpha} \times \vec{T}^{3}) \delta\vec{\varphi}_{,3} d\mathsf{V}.
\end{aligned} \tag{2.29}$$

Mit der Definition der Schnittgrößen, dem Schnittkraftvektor $\vec{N}$, dem Schnittmomentenvektor $\vec{M}$,

$$\begin{aligned}
\vec{N} &:= \int_{\mathsf{Q}} \vec{T}^{3} d\mathsf{Q}, \\
\vec{M} &:= \int_{\mathsf{Q}} (\theta^{\alpha} \underline{\vec{g}}_{\alpha} \times \vec{T}^{3}) d\mathsf{Q}
\end{aligned} \tag{2.30}$$

und den Änderungen der Variablen

$$\begin{aligned}
\delta\vec{\varepsilon} &:= \delta \underline{\vec{u}}_{,3} + \underline{\vec{x}}_{,3} \times \delta\vec{\varphi}, \\
\delta\vec{\kappa} &:= \delta\vec{\varphi}_{,3}
\end{aligned} \tag{2.31}$$

kann die innere virtuelle Arbeit, die nach Gleichung 1.68 der Variation eines Energiefunktionals entspricht, in übersichtlicher Form angeschrieben werden:

$$\delta W_i = \delta \Pi_i = \int_{\mathsf{L}} \vec{N} \delta\vec{\varepsilon} d\mathsf{S} + \int_{\mathsf{L}} \vec{M} \delta\vec{\kappa} d\mathsf{S}. \tag{2.32}$$

2.3.2 Äußere Arbeit

Mit Einführung des Umfangsintegrals U als Funktion der Parameterlinien θ^{α}

$$\mathsf{U} = \mathsf{U}(\theta^{1}_{\mathsf{U}}, \theta^{2}_{\mathsf{U}}) \tag{2.33}$$

und der virtuellen Verrückung nach Gleichung 2.24 folgt für die virtuelle äußere Arbeit δW_a mit $\mathsf{A} = \mathsf{US} + \mathsf{Q} \,|_0^{\mathsf{L}}$

$$\begin{aligned}
\delta W_a &= \int_{\partial^0 \mathsf{S}} \vec{T}_{\mathsf{U}} \delta\vec{u} d\mathsf{A} = \int_{\mathsf{L}} \oint_{\mathsf{U}} \vec{T}_{\mathsf{U}} \delta\vec{u} d\mathsf{U} d\mathsf{S} + \int_{\mathsf{Q}} \vec{T}_{\mathsf{Q}} \delta\vec{u} d\mathsf{Q} \Big|_0^{\mathsf{L}} \\
&= \int_{\mathsf{L}} \oint_{\mathsf{U}} \vec{T}_{\mathsf{U}} (\delta\underline{\vec{u}} + \delta\vec{\varphi} \times \theta^{\alpha}_{\mathsf{U}} \underline{\vec{g}}_{\alpha}) d\mathsf{U} d\mathsf{S} + \int_{\mathsf{Q}} \vec{T}_{\mathsf{Q}} (\delta\underline{\vec{u}} + \delta\vec{\varphi} \times \theta^{\alpha}_{\mathsf{Q}} \underline{\vec{g}}_{\alpha}) d\mathsf{Q} \Big|_0^{\mathsf{L}} \\
&= \int_{\mathsf{L}} \oint_{\mathsf{U}} \vec{T}_{\mathsf{U}} \delta\underline{\vec{u}} d\mathsf{U} d\mathsf{S} + \int_{\mathsf{L}} \oint_{\mathsf{U}} (\theta^{\alpha}_{\mathsf{U}} \underline{\vec{g}}_{\alpha} \times \vec{T}_{\mathsf{U}}) \delta\vec{\varphi} d\mathsf{U} d\mathsf{S} + \\
&+ \int_{\mathsf{Q}} \vec{T}_{\mathsf{Q}} \delta\underline{\vec{u}} d\mathsf{Q} \Big|_0^{\mathsf{L}} + \int_{\mathsf{Q}} \vec{T}_{\mathsf{Q}} (\delta\vec{\varphi} \times \theta^{\alpha}_{\mathsf{Q}} \underline{\vec{g}}_{\alpha}) d\mathsf{Q} \Big|_0^{\mathsf{L}}.
\end{aligned} \tag{2.34}$$

Die beiden Umfangsintegrale in Gleichung 2.34 werden definiert als

$$\begin{aligned}
\vec{N}_{\mathsf{U}} &:= \oint_{U} \vec{T}_{\mathsf{U}} d\mathsf{U} \\
\vec{M}_{\mathsf{U}} &:= \oint_{\mathsf{U}} (\theta^{\alpha}_{\mathsf{U}} \underline{\vec{g}}_{\alpha} \times \vec{T}_{\mathsf{U}}) d\mathsf{U}
\end{aligned} \tag{2.35}$$

und mit Einwirkungsvektor für Linienkräfte bzw. Linienmomente bezeichnet. Weiterhin werden die beiden Flächenintegrale als

$$\begin{aligned}
\vec{N}_{\mathsf{Q}} &:= \int_{\mathsf{Q}} \vec{T}_{\mathsf{Q}} d\mathsf{Q} \\
\vec{M}_{\mathsf{Q}} &:= \int_{\mathsf{Q}} (\theta^{\alpha}_{\mathsf{Q}} \underline{\vec{g}}_{\alpha} \times \vec{T}_{\mathsf{Q}}) d\mathsf{Q}
\end{aligned} \tag{2.36}$$

definiert und mit Einwirkungsvektor für äußere Schnittkräfte bzw. Schnittmomente bezeichnet. Damit ergibt sich für δW_a

$$\delta W_a = \int_{\mathsf{L}} \vec{N}_{\mathsf{U}} \delta\underline{\vec{u}} d\mathsf{S} + \int_{\mathsf{L}} \vec{M}_{\mathsf{U}} \delta\vec{\varphi} d\mathsf{S} + \left| \vec{N}_{\mathsf{Q}} \delta\underline{\vec{u}} \right|_0^{\mathsf{L}} + \left| \vec{M}_{\mathsf{Q}} \delta\vec{\varphi} \right|_0^{\mathsf{L}}. \tag{2.37}$$

2.4 Formänderungsenergie

Die Reduktion der Formänderungsenergie aus Gleichung 1.69 auf die Stabachse

$$\Pi_i = \int_{\mathsf{L}} \int_{\mathsf{Q}} \overset{3}{\pi}_i \, d\mathsf{Q} d\mathsf{S} = \int_{\mathsf{L}} \overset{1}{\pi}_i \, d\mathsf{S} \tag{2.38}$$

erfolgt, indem in $\overset{3}{\pi}_i$ die Stabkinematik eingebaut wird. Mit Restriktion 5, die zu $\gamma_{11} = \gamma_{22}$ und zu $\gamma_{12} = \gamma_{21} = 0$ führt, lässt sich die Formänderungsenergie

$$\overset{1}{\pi}_i = \frac{1}{2} \int_{\mathsf{Q}} [\frac{2E(\gamma_{\alpha 3}\gamma_{\alpha 3})}{(1+\mu)} + \frac{E(2\gamma_{\alpha\alpha}\gamma_{\alpha\alpha} + 4\mu\gamma_{\alpha\alpha}\gamma_{33} + (1-\mu)\gamma_{33}\gamma_{33})}{(1+\mu)(1-2\mu)}] d\mathsf{Q} \tag{2.39}$$

angeben, siehe auch Kessel [27] und Lumpe [40].

Restriktion 6: Das Verhältnis der Abmessungen D/L des Stabes S, dabei sei D der Durchmesser, wird auf 10^{-1} beschränkt.

Mit Restriktion 6 kann die spezifische Formänderungsenergie des Stabes weiter vereinfacht werden:

$$\overset{1}{\pi}_i = \frac{1}{2}\int_{\mathsf{Q}} [E\gamma_{33}\gamma_{33} + 4G\gamma_{\alpha 3}\gamma_{\alpha 3}]d\mathsf{Q}. \tag{2.40}$$

Diese Vereinfachung ist möglich, wenn die Verzerrungen $\gamma_{(\alpha\alpha)}$ durch Auflösung der Gleichung 1.44 nach diesen in der Form

$$\gamma_{(\alpha\alpha)} = \frac{\sigma_{(\alpha\alpha)}}{E}(1+\mu)(1-2\mu) - \mu\gamma_{33} \tag{2.41}$$

eliminiert, die aus Restriktion 6 resultierende Vernachlässigung der Querspannungen $\sigma_{(\alpha\alpha)}$ berücksichtigt und der Gleitmodul

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)} \tag{2.42}$$

eingeführt werden. Die spezifische Formänderungsenergie in Gleichung 2.40 stimmt dann mit der Herleitung von Kappus in [25] und [26] überein. Lumpe gibt in [40] den Fehler der in Gleichung 2.40 durch Einführung von Restriktion 6 gemacht wird mit $0,1$ Promille an.

Werden nun die Verzerrungen γ_{33} und $\gamma_{\alpha 3}$ durch Gleichung 2.23 ersetzt, folgt für die Formänderungsenergie mit $b = 1$ schließlich:

$$\begin{aligned}\overset{1}{\pi}_i = \frac{1}{2}\int_{\mathsf{Q}} [&E\underline{\gamma}_{33}\underline{\gamma}_{33} + E\theta^\beta\theta^\gamma\underline{\kappa}_{\beta 3}\underline{\kappa}_{\gamma 3}(R^l_3\underline{F}_{l3})^2 + \\ &+ \frac{1}{4}E\theta^\beta\theta^\gamma\theta^\delta\theta^\epsilon\underline{\kappa}_{\beta 3}\underline{\kappa}_{\gamma 3}\underline{\kappa}_{\delta 3}\underline{\kappa}_{\epsilon 3} + 2E\theta^\beta\underline{\kappa}_{\beta 3}R^l_3\underline{F}_{l3}\underline{\gamma}_{33} + \\ &+ E\theta^\beta\theta^\gamma\underline{\kappa}_{\beta 3}\underline{\kappa}_{\gamma 3}\underline{\gamma}_{33} + E\theta^\beta\theta^\gamma\theta^\delta\underline{\kappa}_{\beta 3}\underline{\kappa}_{\gamma 3}\underline{\kappa}_{\delta 3}R^l_3\underline{F}_{l3} + \\ &+ 4G\underline{\gamma}_{\alpha 3}\underline{\gamma}_{\alpha 3} + 4G\theta^\beta\underline{\kappa}_{\beta\alpha}\underline{\gamma}_{\alpha 3} + G\theta^\beta\theta^\gamma\underline{\kappa}_{\beta\alpha}\underline{\kappa}_{\gamma\alpha}]d\mathsf{Q}.\end{aligned} \tag{2.43}$$

Die Vernachlässigung des Terms 4. Ordnung unter Berücksichtigung der Beziehung

$$\underline{\kappa}_{ij} = e_{jik}\kappa_k$$

und der Gleichungen 2.49 und 2.50 führt auf die etwas übersichtlichere Form der Formänderungsenergie:

$$\begin{aligned}\overset{1}{\pi}_i = \frac{E}{2}\int_{\mathsf{Q}} &(\varepsilon_3^2 + \theta^\beta\theta^\gamma e_{\beta\alpha}e_{\gamma\delta}\kappa_\alpha\kappa_\delta(R^l_3\underline{F}_{l3})^2 + \\ &+ \theta^\beta\theta^\gamma e_{\beta\alpha}e_{\gamma\delta}\kappa_\alpha\kappa_\delta\varepsilon_3)d\mathsf{Q} + \\ &+ \frac{G}{2}\int_{\mathsf{Q}}(\varepsilon_\alpha^2 + \theta^\beta\theta^\gamma e_{\alpha\beta}e_{\alpha\gamma}\kappa_3^2)d\mathsf{Q}.\end{aligned} \tag{2.44}$$

Nun werden noch die Querschnittswerte

$$S^\beta = \int_{\mathsf{Q}} \theta^\beta d\mathsf{Q} \quad , \quad I^{\beta\gamma} = \int_{\mathsf{Q}} \theta^\beta \theta^\gamma d\mathsf{Q} \tag{2.45}$$

für die bezüglich der Hauptachsen des Querschnitts folgendes gilt:

$$S^\beta = 0 \quad , \quad I^{\beta\gamma} \begin{cases} = 0 & \text{für } \beta \neq \gamma \\ \neq 0 & \text{für } \beta = \gamma \end{cases} \tag{2.46}$$

eingeführt. Die erste Bedingung in Gleichung 2.46 ist in Gleichung 2.44 bereits eingearbeitet.

2.5 Stabgleichungen

Das Differentialgleichungssystem zur Beschreibung des Übergangs des geraden Stabes von den Referenz- bzw. geometrisch imperfekten Konfigurationen in die Momentankonfiguration besteht aus 18 Gleichungen, den Stabgleichungen.

Aus dem Prinzip der virtuellen Arbeit nach Abschnitt 2.3 lassen sich die 6 Gleichgewichtsbedingungen ableiten:

$$\vec{N}_{,3} + \vec{N}_{\mathsf{U}} = 0, \tag{2.47}$$

$$\vec{M}_{,3} - \underline{\vec{x}}_{,3} \times \vec{N} + \vec{M}_{\mathsf{U}} = 0. \tag{2.48}$$

Die Verzerrungs-Verschiebungsbeziehungen, die aus den Änderungen der konstitutiven Variablen, siehe Gleichung 2.31, hergeleitet werden können und von Kessel [27] in der Form

$$\varepsilon_\alpha = \underline{F}_3^k \underline{F}_{k\alpha} = 2\underline{\gamma}_{3\alpha}, \quad \varepsilon_3 = \frac{1}{2}(\underline{F}_3^k \underline{F}_{k3} - \delta_{33}) = \underline{\gamma}_{33} \tag{2.49}$$

und

$$\underline{\kappa}_\alpha = \kappa_\alpha, \quad \underline{\kappa}_3 = \kappa_m R_m^k \underline{F}_{k3} \tag{2.50}$$

angegeben werden, liefern weitere 6 Gleichungen. Die fehlenden Gleichungen sind die 6 konstitutiven Beziehungen. Diese ergeben sich direkt durch Ableitung der auf die Stabachse S bezogenen Formänderungsenergie $\overset{1}{\pi}$ in Gleichung 2.44 nach den Änderungen der Variablen der Gleichung 2.31 zu:

$$\begin{aligned} \vec{N} &= \frac{\partial \overset{1}{\pi}(\vec{\varepsilon}, \vec{\kappa})}{\partial \vec{\varepsilon}}, \\ \vec{M} &= \frac{\partial \overset{1}{\pi}(\vec{\varepsilon}, \vec{\kappa})}{\partial \vec{\kappa}} \end{aligned} \tag{2.51}$$

und im einzelnen

$$\begin{aligned}
&N^1 = GA\varepsilon_1, \qquad N^2 = GA\varepsilon_2, \\
&N^3 = EA\varepsilon_3 + \frac{1}{2}EI^{11}\kappa_2\kappa_2 + \frac{1}{2}EI^{22}\kappa_1\kappa_1, \\
&M^1 = EI^{22}\kappa_1\left((R_3^l\underline{F}_{l3})^2 + \varepsilon_3\right), \qquad M^2 = EI^{11}\kappa_2\left((R_3^l\underline{F}_{l3})^2 + \varepsilon_3\right), \\
&M^3 = G(I^{11} + I^{22})\kappa_3 = GI^P\kappa_3
\end{aligned} \tag{2.52}$$

mit I^P als polares Trägheitsmoment.

Linearisierte Stabgleichungen

Die Auswertung der konstitutiven Beziehungen der Gleichung 2.52 liefert bei alleiniger Berücksichtigung linearer Deformationsgrößen die folgenden Schnittkräfte und -momente:

$$\begin{aligned}
&N^1 = GA(\underline{u}^1_{,3} - \omega^2), \qquad N^2 = GA(\underline{u}^2_{,3} + \omega^1), \qquad N^3 = EA\underline{u}^3_{,3}, \\
&M^1 = -EI^{22}\omega^1_{,3}, \qquad M^2 = -EI^{11}\omega^2_{,3}, \qquad M^3 = GI^P\omega^3_{,3}.
\end{aligned} \tag{2.53}$$

Kapitel 3

Einordnung der Theorien in Bezug geometrischer Nichtlinearität

3.1 Allgemeines

In den Kapiteln 1 und 2 wurde eine geometrisch nichtlineare Stabtheorie für den geraden wölbfreien Stab unter statischer Belastung dargestellt. Aber schon diese Darstellung zeigt, dass die Einführung von Restriktionen, es sei auf die Restriktionen 1 bis 6 verwiesen, erforderlich und sinnvoll ist, um übersichtliche Gleichungen zu erhalten. Die Auswertung der Gleichungen ist trotz dieser Einschränkungen nur in Sonderfällen in geschlossener analytischer Form möglich und wird daher nur für einige wenige Beispiele angegeben. Die Lösung der Gleichungen komplexer Strukturen wird dann näherungsweise mit Hilfe der Finiten Element Methode als direktes Variationsverfahren durchgeführt.

Für die richtige Anwendung der geometrisch nichtlinearen Stabtheorie ist deren Einordnung in die gängige Terminologie des Ingenieurwesens erforderlich. In diesem Zusammenhang treten Begriffe wie kleine, mäßige, große oder endliche Drehungen, Verschiebungen und Verformungen genauso häufig auf, wie Theorie I., II. und III. Ordnung. Aus mathematischer Sicht ist diese Zuordnung recht einfach, wenn für die Beschreibung der Winkelfunktionen Reihenentwicklungen der Form

$$\begin{aligned}\sin(\varphi+\varphi_0) &= \sin\varphi_0 + \varphi\cos\varphi_0 - \frac{\varphi^2}{2!}\sin\varphi_0 - \frac{\varphi^3}{3!}\cos\varphi_0 + ... \\ &= \varphi_0 - \frac{\varphi_0^3}{3!} + \varphi\left(1-\frac{\varphi_0^2}{2!}\right) - \frac{\varphi^2}{2!}\left(\varphi_0 - \frac{\varphi_0^3}{3!}\right) - \frac{\varphi^3}{3!}\left(1-\frac{\varphi_0^2}{2!}\right) + ...\end{aligned} \tag{3.1}$$

bzw.

$$\begin{aligned}\cos(\varphi+\varphi_0) &= \cos\varphi_0 - \varphi\sin\varphi_0 - \frac{\varphi^2}{2!}\cos\varphi_0 + \frac{\varphi^3}{3!}\sin\varphi_0 + ... \\ &= 1 - \frac{\varphi_0^2}{2!} - \varphi\left(\varphi_0 - \frac{\varphi_0^3}{3!}\right) - \frac{\varphi^2}{2!}\left(1 - \frac{\varphi_0^2}{2!}\right) + \frac{\varphi^3}{3!}\left(\varphi_0 - \frac{\varphi_0^3}{3!}\right) + ...\end{aligned} \tag{3.2}$$

verwendet werden. Dabei sind die Imperfektionen φ_0 maximal mäßige Drehungen. In den folgenden Abschnitten werden den Begriffen der Theorien die entsprechenden Bezeichnungen der Drehungen zugeordnet. Es werden folgende Winkel festgelegt:

kleine Drehungen $\varphi \leq 1°$

mäßige Drehungen $\varphi \leq 10°$

große Drehungen $\varphi \leq 30°$.

In diesem Zusammenhang wird darauf hingewiesen, dass die quantitative Beschreibung der Verformung nicht nur den spannungserzeugenden Teil der Deformation enthält. Die Deformation kann, wie in Abschnitt 1.3.1 gezeigt, in eine Starrkörperbewegung und eine Streckung zerlegt werden. Dabei wird die Zerlegungsreihenfolge berücksichtigt, siehe hierzu die Gleichungen 1.25 und 1.26. Nach Restriktion 2 wird für den spannungserzeugenden Teil der Deformation, die Streckung, ein linearer Zusammenhang zwischen Spannungen und Dehnungen vorausgesetzt.

Im Bauingenieurwesen werden bei der Berechnung räumlicher Stabwerke überwiegend die Theorien I. und II. Ordnung angewendet, daher wird auch die allgemein bekannte Schreibweise für die Schnittgrößen verwendet:

$N^3 = N$, $N^2 = Q_z$, $N^1 = Q_y$

$M^3 = M_T$, $M^2 = M_z$, $M^1 = M_y$

$\underline{u}^3 = u$, $\underline{u}^2 = w$, $\underline{u}^1 = v$

$\omega^3 = \varphi_x$, $\omega^2 = \varphi_z$, $\omega^1 = \varphi_y$

Diese Theorien erfordern die Einführung weiterer Restriktionen. Es wird zwischen hauptsächlich durch Normalkräfte beanspruchten Stäben, den Fachwerkstäben, und überwiegend biegebeanspruchten Stäben unterschieden. Für beide Stabtypen gilt:

Restriktion 7: In den konstitutiven Variablen ε_i und κ_i werden nur die linearen Terme berücksichtigt.

Für die biegebeanspruchten Stäbe sind weitere Restriktionen erforderlich:

Restriktion 8: Die Verzerrungen in Richtung der Stabachse S $\underline{\gamma}_{33}$ infolge der Normalkräfte N sind bei Berücksichtigung der durch die Gebrauchstauglichkeit im wesentlichen vorhandenen kleinen Verdrehungen vernachlässigbar.

Restriktion 9: Die Querschnitte Q stehen auch nach der Deformation senkrecht auf der Stabachse S, d.h. die Schubdeformationen werden vernachlässigt.

Restriktion 7 führt auf die linearisierten Stabgleichungen in Abschnitt 2.5. Die Restriktionen 8 und 9 bedeuten eine Vernachlässigung der konstitutiven Beziehungen für N und Q für Biegestäbe.

Mit diesen Einschränkungen und der Betrachtung ebener Systeme verbleiben nur noch eine konstitutive Beziehung aus Gleichung 2.53 für Fachwerkstäbe

$$N = EAu'$$

und eine für biegebeanspruchte Stäbe

$$M_z = -EI_y\varphi_z'.$$

3.2 Einordnung der Theorien I. bis III. Ordnung

Theorie I. Ordnung - kleine Drehungen

Bei der Theorie I. Ordnung werden die Gleichgewichtsbedingungen am unverformten System, d.h. in den Referenz- bzw. geometrisch imperfekten Konfigurationen, aufgestellt. Auswirkungen der Verformungen auf den Gleichgewichtszustand werden vernachlässigt. Bei der Berechnung der Verdrehungen werden neben der Imperfektion φ_0 jeweils nur Terme der Reihen nach den Gleichungen 3.1 und 3.2 die in φ linear sind berücksichtigt. Mit Restriktion 2 und unter Benutzung nur linearer Anteile des Verzerrungstensor nach Gleichung 1.30, d.h. bei Verwendung des HOOKEschen Werkstoffgesetzes, ist diese Theorie vollständig linear. Die Belastung kann in einem Lastschritt aufgebracht werden.

Theorie II. Ordnung - kleine Drehungen

Bei der Theorie II. Ordnung werden die Gleichgewichtsbedingungen nach Gleichung 2.47 am verformten System, d.h. in der Momentankonfiguration, aufgestellt. Auswirkungen der Verformungen auf den Gleichgewichtszustand können somit berücksichtigt werden. Mit dieser Theorie wird es möglich nichtlineare Last-Verschiebungsbeziehungen zu beschreiben. Es gelten weiterhin alle Einschränkungen des Abschnitts 3.2.

Theorie III. Ordnung - mäßige bis endliche Drehungen

Die Gleichgewichtsbedingungen werden, wie auch bei Theorie II. Ordnung, am verformten System aufgestellt. Die Theorie III. Ordnung kann in Abhängigkeit von der Größe der Verformungen spezifiziert werden. Die Berücksichtigung mäßiger Drehungen, hierbei werden neben den Imperfektionen alle Reihenglieder bis zur dritten Potenz von φ berücksichtigt, oder großer Drehungen, nun werden alle Reihenglieder bis zur fünften Potenz von φ untersucht, erlaubt es auch Last-Verschiebungsbeziehungen im überkritischen Bereich anzugeben.

Werden bei der Ermittlung der Winkelfunktionen unendlich viele Reihenglieder berücksichtigt, dann geht die Lösung nach Theorie III. Ordnung für große Drehungen in die exakte Lösung für endliche Drehungen über.

3.3 Zusammenstellung

Bild 3.1 zeigt in übersichtlicher Form die verschiedenen im Ingenieurwesen bekannten geometrisch nichtlinearen und physikalisch linearen Theorien.

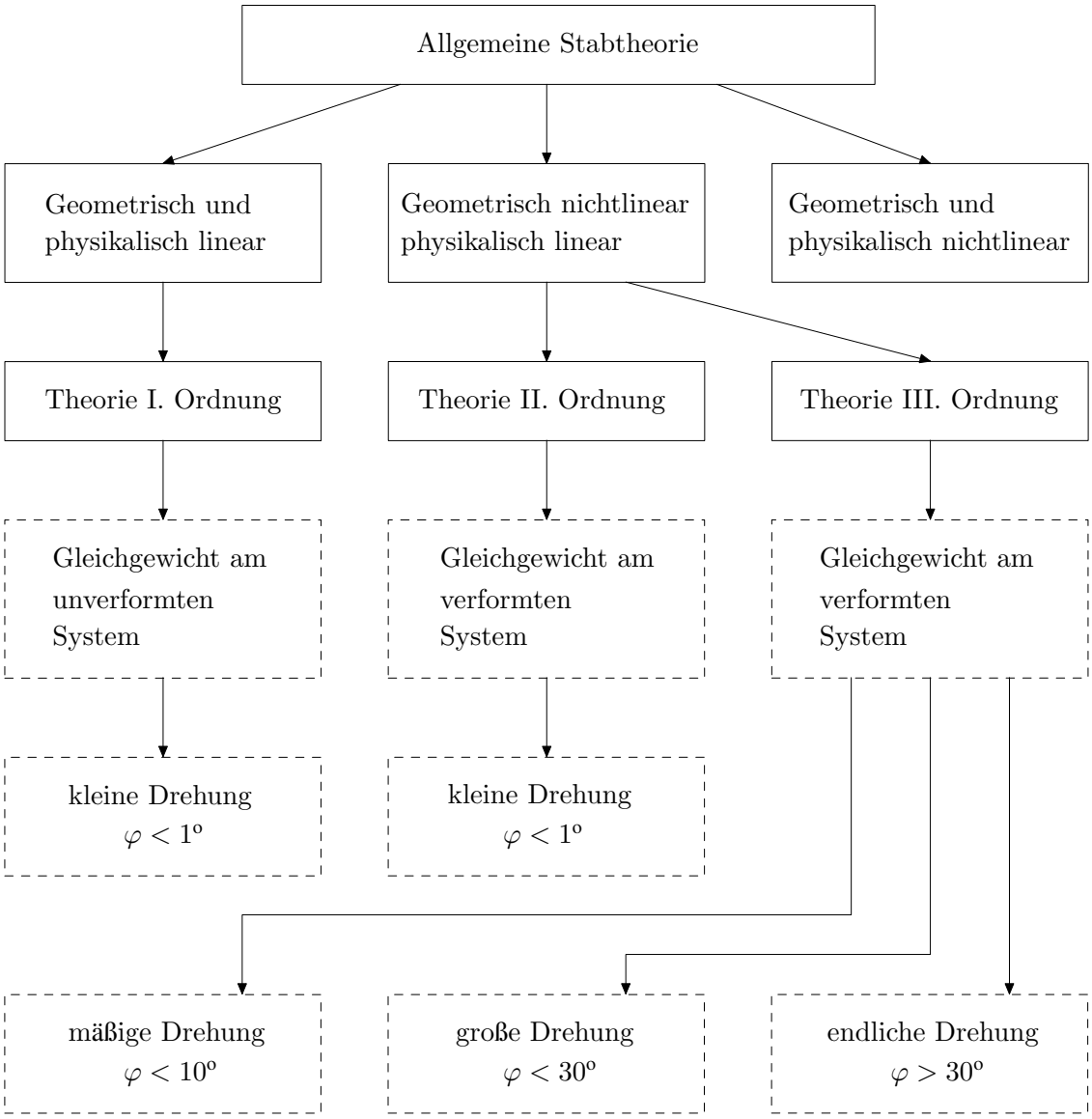


Bild 3.1: Einordnung der Theorien

3.4 Beispiele

Zur Veranschaulichung der verschiedenen Theorien und deren Unterschiede werden die folgenden zwei sehr einfachen und ebenen Stabsysteme untersucht.

Beide Systeme sind statisch bestimmt, d.h. zur Ermittlung des Verschiebungszustandes genügt die Aufstellung der Gleichgewichtsbedingungen nach den Gleichungen 2.47 und 2.48. Die Einführung der dehn- und biegestarren Stäbe und deren Ersatz durch entsprechende Federn vereinfacht die konstitutiven Beziehungen, die nun durch die Federgesetze ersetzt werden.

Die Reduktion auf ebene Systeme verringert auch die Anzahl der Gleichgewichtsbedingungen. Zur Beschreibung des Verformungszustandes genügen schon zwei Kräftegleichgewichte und ein Momentengleichgewicht. In den weiteren Ausführungen wird daher die Komponentenschreibweise gewählt, wobei Indizes nur verwendet werden, wenn sie zum Verständnis erforderlich sind.

Beispiel 1: Druckstab mit Rotationsfeder

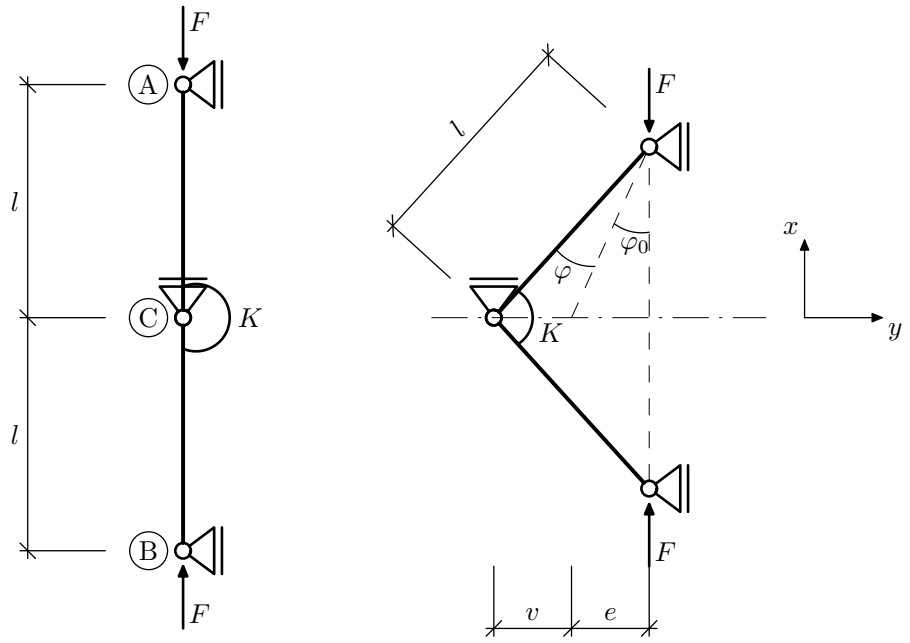


Bild 3.2: Druckstab mit Rotationsfeder

In Bild 3.2 ist ein beidseitig gelenkig und unverschieblich gelagerter Druckstab, wie ihn auch PETERSEN in [46] beschreibt, dargestellt. Dieser besteht vereinfachend aus zwei dehn- und biegestarren Einzelstäben, die durch eine Drehfeder, diese soll die Biegesteifigkeit des Stabes beschreiben, verbunden sind. Der Stab wird durch

richtungstreue Einzellasten beansprucht. Bild 3.2a zeigt das System in der Referenzkonfiguration und Bild 3.2b in der aus der geometrisch imperfekten resultierenden Momentankonfiguration, die durch die Abbildung $\phi_{t,t_I}({}^I\vec{X})$ aus Gleichung 1.11 gegeben ist.

Das Kräftegleichgewicht in x-Richtung liefert die Auflagerkraft $T_{Cx} = 0$ und für das Momentengleichgewicht am Gesamtsystem folgen für die Auflagerkräfte $T_{Ay} = T_{By} = 0$. Für das Momentengleichgewicht des oberen Teilsystems im Punkt C bezüglich der Referenzkonfiguration gilt:

$$\sum M_C = 0 = F \sin(\varphi + \varphi_0) l - K\varphi. \tag{3.3}$$

Theorie I. Ordnung

Eine Berechnung nach Theorie I. Ordnung liefert nur dann zusätzliche gegenseitige Verdrehungen der Einzelstäbe, wenn das System imperfekt ist. Die Größe der Verdrehung ergibt sich mit den Annahmen nach Abschnitt 3.2 zu

$$\varphi = \alpha \left(\varphi_0 + \frac{\varphi_0^3}{6} \right) \text{ mit } \alpha = \frac{Fl}{K}. \tag{3.4}$$

Theorie II. Ordnung

Nach Theorie II. Ordnung folgt

$$\varphi = \frac{\alpha}{1 - \alpha + \alpha \frac{\varphi_0^2}{2}} \left(\varphi_0 + \frac{\varphi_0^3}{6} \right) \tag{3.5}$$

und für kleine φ_0

$$\varphi = \frac{\alpha}{(1 - \alpha)} \varphi_0 \tag{3.6}$$

Aus der transzendenten Gleichung 3.6 wird sofort erkennbar, dass für $\alpha = 1$ die Gleichung nicht lösbar ist. Die daraus resultierende Kraft

$$F = \frac{K}{l} \tag{3.7}$$

ist die kritische Kraft. Der in Gleichung 3.6 angegebene Faktor $\frac{1}{1-\alpha}$ wird auch als DISCHINGER-Faktor, nach DISCHINGER [9], oder Vergrößerungsfaktor bezeichnet. Für das perfekte System ergibt sich

$$0 = \varphi(\alpha - 1). \tag{3.8}$$

Theorie III. Ordnung

Bei der Theorie III. Ordnung werden hier nur die mäßigen und endlichen Drehungen behandelt. Es ergibt sich für mäßige Drehungen bei Vernachlässigung aller Terme mit Potenzen größer 3 die nun nicht mehr transzendente Gleichung:

$$0 = \varphi \left(\alpha - \alpha \frac{\varphi^2}{6} - 1 - \alpha \frac{\varphi_0^2}{2} - \alpha \frac{\varphi \varphi_0}{2} \right) + \varphi_0 \left(\alpha - \alpha \frac{\varphi_0^2}{6} \right). \tag{3.9}$$

Bei Vernachlässigung der Imperfektion φ_0 folgt

$$0 = \varphi \left(\alpha - \alpha \frac{\varphi^2}{6} - 1 \right). \tag{3.10}$$

Hier lässt sich der Unterschied zur Theorie II. Ordnung direkt ablesen.

Das exakte Momentengleichgewicht für endliche Drehungen ist in Gleichung 3.3 angegeben und wird für $\varphi_0 = 0$ und $\varphi_0 = \frac{1}{10}$ in Bild 3.3 ausgewertet.

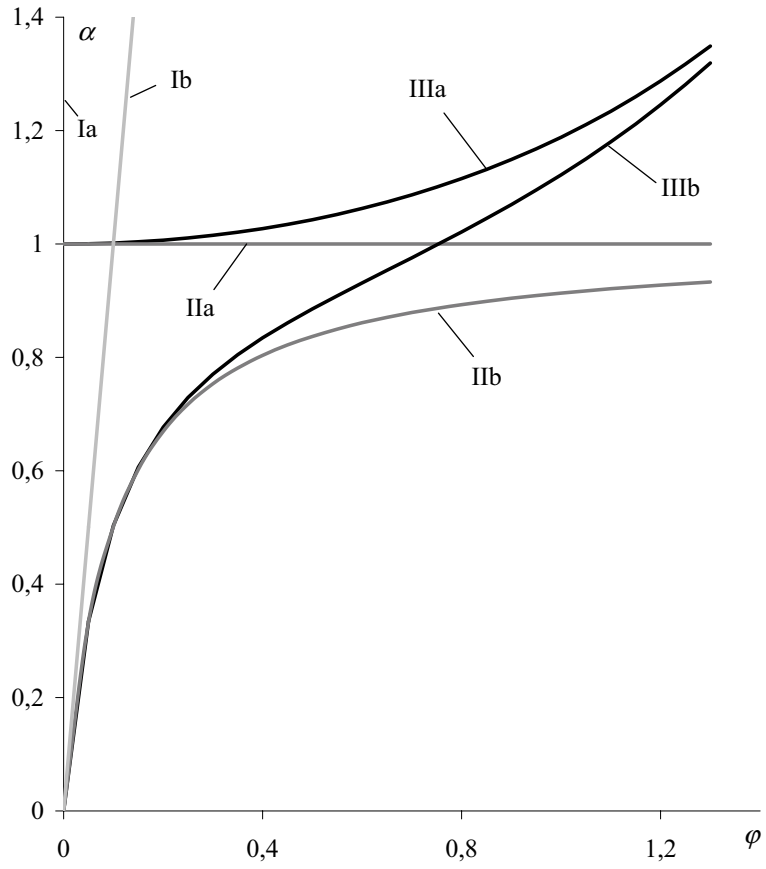


Bild 3.3: Last-Verdrehungsbeziehung für den Druckstab aus Bild 3.2

mit I-Gl. 3.3, II-Gl. 3.4, III-Gl. 3.5 und IV-Gl. 3.9 für a $\varphi_0 = 0$ und b $\varphi_0 = \frac{1}{10}$

Beispiel 2: Druckstab mit Translationsfeder

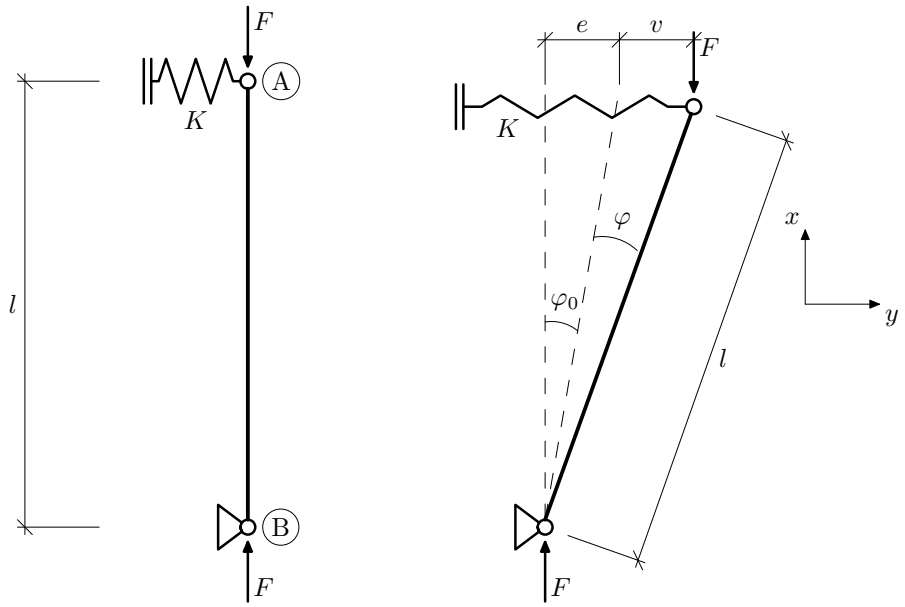


Bild 3.4: Druckstab mit Translationsfeder

Als zweites System wird das in Bild 3.4 beschriebene Stabsystem in Analogie zu BRITVEC [6] verwendet. Wie schon im ersten Beispiel ist der Stab dehn- und biegestarr. Als Randbedingung wird einseitig eine gelenkig und unverschiebliche Lagerung durch eine Translationsfeder ersetzt. Wie auch Bild 3.2 zeigt Bild 3.4a den Stab in der Referenzkonfiguration und Bild 3.4b in der aus der geometrisch imperfekten resultierenden Momentankonfiguration.

Das Momentengleichgewicht im Punkt B lautet:

$$\sum M_B = 0 = Fl\sin(\varphi+\varphi_0) - Kl^2(\sin(\varphi+\varphi_0) - \sin\varphi_0)\cos(\varphi+\varphi_0). \qquad (3.11)$$

Theorie I. Ordnung

Die Berechnung nach Theorie I. Ordnung liefert nur dann eine zusätzliche Verdrehung des Stabes, wenn das System imperfekt ist. Die Größe der Verdrehung ergibt sich mit den Annahmen nach Abschnitt 3.2 und bei Vernachlässigung aller Terme mit Potenzen größer 3 bzw. in denen φ nichtlinear ist zu

$$\varphi = \alpha\frac{\varphi_0 - \frac{\varphi_0^3}{6}}{1+\varphi_0^2} \text{ mit } \alpha = \frac{F}{Kl}. \qquad (3.12)$$

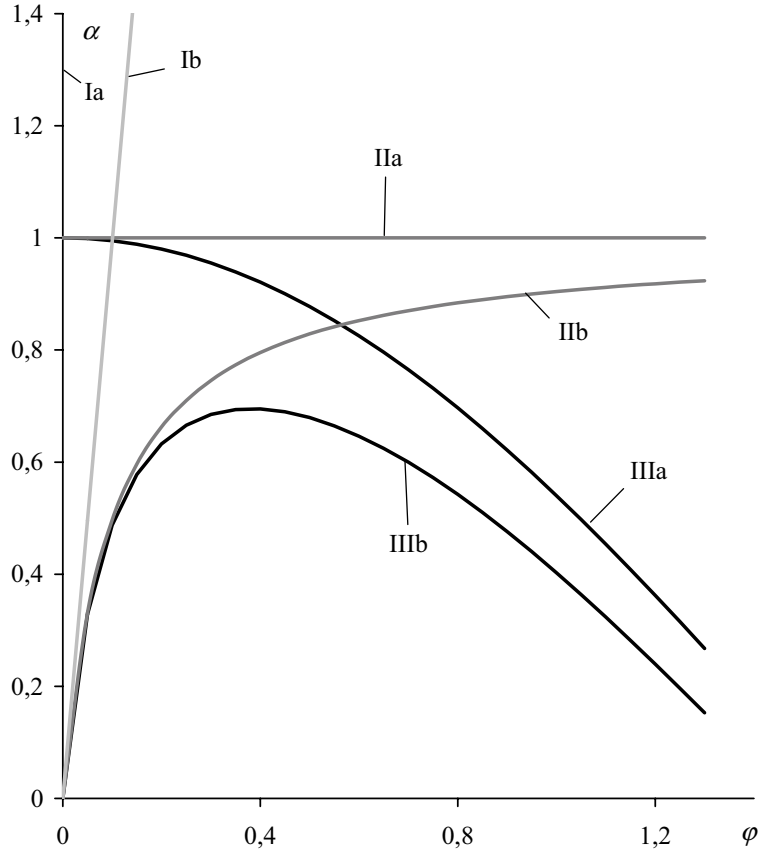


Bild 3.5: Last-Verdrehungsbeziehung für den Druckstab aus Bild 3.4
mit I-Gl. 3.11, II-Gl. 3.12, III-Gl. 3.13 und IV-Gl. 3.15 für a $\varphi_0 = 0$ und b $\varphi_0 = \frac{1}{10}$

Theorie II. Ordnung

Nach Theorie II. Ordnung folgt auch bei diesem Beispiel

$$\varphi = \frac{\alpha}{1 - \varphi_0^2 + \alpha\frac{\varphi_0^2}{2} - \alpha}\left(\varphi_0 - \frac{\varphi_0^3}{6}\right) \tag{3.13}$$

mit der kritischen Kraft

$$F = Kl. \tag{3.14}$$

Theorie III. Ordnung

Bei der Theorie III. Ordnung werden jetzt nur die mäßigen Drehungen behandelt. Es ergibt sich dann die nun nicht mehr transzendente Gleichung:

$$0 = \varphi\left(\alpha - \alpha\frac{\varphi^2}{6} - 1 - \alpha\frac{\varphi_0^2}{2} - \alpha\frac{\varphi\varphi_0}{2} + \varphi_0^2 + \frac{3\varphi\varphi_0}{2} + \frac{2\varphi^2}{3}\right) + \varphi_0\left(\alpha - \alpha\frac{\varphi_0^2}{6}\right). \tag{3.15}$$

Das exakte Momentengleichgewicht für endliche Drehungen ist in Gleichung 3.11 angegeben und wurde für $\varphi_0 = 0$ und $\varphi_0 = \frac{1}{10}$ in Bild 3.5 ausgewertet.

Vergleich

In Abschnitt 3.4 wurden zwei einfache Stabsysteme nach verschiedenen geometrischen Theorien berechnet. Die beiden Bilder 3.3 und 3.5 ermöglichen nun einen direkten Vergleich der Ergebnisse. Im ersten Beispiel konnte die Belastung über die kritische Kraft F_{crit} hinaus gesteigert werden, wenn bei der Berechnung die Beschränkung auf kleine Drehungen aufgegeben wird. Dieses überkritische Verhalten ist gutartig, d.h es existiert für ein spezielles Lastniveau F und eine ausgewählte Imperfektion φ_0 immer nur ein Gleichgewichtszustand. Im Unterschied dazu gibt es beim zweiten Beispiel für mindestens ein Lastniveau F und eine Imperfektion φ_0 zwei Gleichgewichtszustände, wenn bei der Auswertung des Momentengleichgewichtes in Gleichung 3.11 mindestens mäßige Drehungen berücksichtigt werden. Dieses Stabsystem ist bösartig im überkritischen Bereich. Weiterhin zeigen die beiden Bilder, dass bei einer Berechnung nach Theorie II. Ordnung diese Effekte nicht berücksichtigt werden können.

Die Untersuchung imperfekter Systeme unter Berücksichtigung mindestens mäßiger Drehungen dient in erster Linie der richtigen Einordnung der Bemessungslasten und deren Abstand von eventuell vorhandenen kritischen Lasten. Ist das Verhalten der Systeme in der Nähe des kritischen Bereiches von Interesse muss überprüft werden, ob die auftretenden Verformungen plausibel und von dem verwendeten Material vertretbar sind.

Kapitel 4

Finite-Elemente-Methode

4.1 Variation des Potentials

In den Kapiteln 1 und 2 wird eine allgemeine Theorie für den geraden Stab mit COSSERAT-Kinematik dargestellt. Bei dieser Darstellung werden einige Restriktionen eingeführt. Diese sollen noch einmal zusammenfassend angegeben werden:

Restriktion 1: Als Belastung des Körpers werden nur Oberflächenkräfte, die auf die Stabachse S bezogen werden können, zugelassen.

Restriktion 2: Bei Beschränkung auf kleine Verzerrungen wird ein linearer Zusammenhang zwischen Spannungen und Verzerrungen vorausgesetzt. Für kleine Drehungen gemäß Kapitel 3 Abschnitte 3.2 und 3.2 wird das HOOKEsche Gesetz als Materialgesetz verwendet, für alle anderen das ST. VENANTsche.

Restriktion 3: Die Raumkurve der Stabachse kann abschnittsweise durch Geraden approximiert werden, d.h. alle Stababschnitte sind in den Referenz- und geometrisch imperfekten Konfigurationen gerade. Somit lässt sich eine leichte Überführung der Stabgleichungen für die Auswertung mittels finiter Elemente erreichen.

Restriktion 4: Die Querschnitte Q sind sowohl in den Referenz- und geometrisch imperfekten Konfigurationen als auch in der Momentankonfiguration eben (BERNOULLI). Schubverzerrungen werden im Mittel durch die Verdrehung der Querschnitte bezüglich der Stabachse berücksichtigt. Wölbkrafttorsion wird vernachlässigt.

Restriktion 5: Die Querschnittsform bleibt auch nach der Deformation erhalten (de ST. VENANT).

Restriktion 6: Das Verhältnis der Abmessungen D/L des Stabes S, dabei sei D der Durchmesser, wird auf kleiner als 10^{-1} beschränkt.

Im folgenden wird ausgehend von den Stabgleichungen 2.47 bis 2.52 und dem Prinzip der virtuellen Arbeit nach Abschnitt 2.3 das elastische Potential des geraden Stabes mit den oben genannten Einschränkungen angegeben. Die innere potentielle Energie ist

$$\Pi_i = \int_{\mathsf{L}} \vec{N}\vec{\varepsilon} d\mathsf{S} + \int_{\mathsf{L}} \vec{M}\vec{\kappa} d\mathsf{S}. \tag{4.1}$$

Für die äußere potentielle Energie gilt

$$\Pi_a = -\int_{\mathsf{L}} \vec{N}_{\mathsf{U}}\underline{\vec{u}} d\mathsf{S} - \int_{\mathsf{L}} \vec{M}_{\mathsf{U}}\vec{\varphi} d\mathsf{S} - \left|\vec{N}_{\mathsf{Q}}\underline{\vec{u}}\right|_0^{\mathsf{L}} - \left|\vec{M}_{\mathsf{Q}}\vec{\varphi}\right|_0^{\mathsf{L}}. \tag{4.2}$$

Für die in Kapitel 2 hergeleitete Stabtheorie folgt das elastische Potential zu

$$\begin{aligned} \Pi &= \Pi_i + \Pi_a \\ &= \int_{\mathsf{L}} \vec{N}\vec{\varepsilon} d\mathsf{S} + \int_{\mathsf{L}} \vec{M}\vec{\kappa} d\mathsf{S} - \int_{\mathsf{L}} \vec{N}_{\mathsf{U}}\underline{\vec{u}} d\mathsf{S} - \\ &- \int_{\mathsf{L}} \vec{M}_{\mathsf{U}}\vec{\varphi} d\mathsf{S} - \left|\vec{N}_{\mathsf{Q}}\underline{\vec{u}}\right|_0^{\mathsf{L}} - \left|\vec{M}_{\mathsf{Q}}\vec{\varphi}\right|_0^{\mathsf{L}}. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Eine Möglichkeit der Auswertung dieser Gleichung besteht in der Behandlung als Variationsproblem.

Sei V Vektorraum aller stetigen Funktionen $F : [0, \mathsf{L}] \to \mathbb{R}$ dann heißt eine Abbildung

$$g : \begin{cases} V & \to & \mathbb{R} \\ g & \to & g(\vec{\varepsilon}, \vec{\kappa}, \underline{\vec{u}}, \vec{\varphi}) := \int_0^{\mathsf{L}} F(\mathsf{S}, \vec{\varepsilon}, \vec{\kappa}, \underline{\vec{u}}, \vec{\varphi}) d\mathsf{S} = \Pi \end{cases} \tag{4.4}$$

Funktional. Das elastische Potential stellt also ein Funktional dar. Der zu untersuchende Zustand sei eine Gleichgewichtslage des konservativen Systems und kann durch

$$\Pi = g(\vec{\varepsilon}, \vec{\kappa}, \underline{\vec{u}}, \vec{\varphi}) = Extremum! \tag{4.5}$$

beschrieben werden. Dann gilt für die 1. Ableitung

$$\delta\Pi = 0. \tag{4.6}$$

Befindet sich das System im Gleichgewicht hat das Potential einen stationären Wert.

Leipholz untersucht in [36] das Potential in Abhängigkeit eines die Lage kennzeichnenden Systemparameters h. Mit $\Pi = \Pi(h)$ und dem zur Gleichgewichtslage gehörenden Parameter h_0 folgt mit Gleichung 4.6 $\delta\Pi(h_0) = 0$. Die Untersuchung

der Abhängigkeit des Potentials Π vom Systemparameter h kann durch Variation von h_0 erfolgen:

$$\begin{aligned}\Pi(h_0+\delta h) &= \Pi(h_0) + \left(\frac{\partial \Pi}{\partial h}\right)_{h_0} \delta h + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial h^2}\right)_{h_0} \delta h^2 + ... \\ &= \Pi(h_0) + \delta\Pi(h_0) + \frac{1}{2}\delta^2\Pi(h_0) + ...\end{aligned} \tag{4.7}$$

Erste Variation des Potentials

Mit der ersten Variation des Potentials, die durch Gleichung 4.6 gegeben ist und auch als GÂTEAUX-Variation bezeichnet wird, folgt direkt

$$\Pi(h_0+\delta h) = \Pi(h_0) + \frac{1}{2}\delta^2\Pi(h_0) + ... \tag{4.8}$$

Zweite Variation des Potentials

Werden kleine Variationen δh vorausgesetzt, d.h. es wird nur die unmittelbare Umgebung des Gleichgewichtszustandes untersucht, kann $\Pi(h_0+\delta h)$ durch

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial h^2}\right)_{h_0} \delta h^2 = \frac{1}{2}\delta^2\Pi(h_0) \tag{4.9}$$

beschrieben werden.

Aus dieser Formulierung können dann die drei Folgenden die Gleichgewichtslage beschreibenden Formulierungen abgeleitet werden. Die Gleichgewichtslage ist für

- $\delta^2\Pi < 0$ *instabil*,
- $\delta^2\Pi > 0$ *stabil* und
- $\delta^2\Pi = 0$ *indifferent*.

In Bild 4.1 sind die drei Gleichgewichtslagen anschaulich gegenüber-gestellt. Im EUKLIDischen Vektorraum $\mathbb{E}^3$ mit der kartesischen Basis $\mathbf{E} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ sind zwei Flächen $F_1(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ und $F_2(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{c} = konst.)$ eingetragen, die jede für sich ein elastisches Potential beschreiben sollen. Die Kugel symbolisiert die Gleichgewichtslage, d.h. nach Gleichung 4.6 gilt $\delta\Pi = 0$.

Wird die Kugel in Richtung des Basisvektor $\vec{e}_1$ infinitesimal ausgelenkt, rollt sie von der Potentialfläche F_1 herunter. Die Kugel setzt potentielle Energie frei und findet, zumindest lokal, keine Gleichgewichtslage mehr. In dieser Richtung ist die Gleichgewichtslage *instabil*.

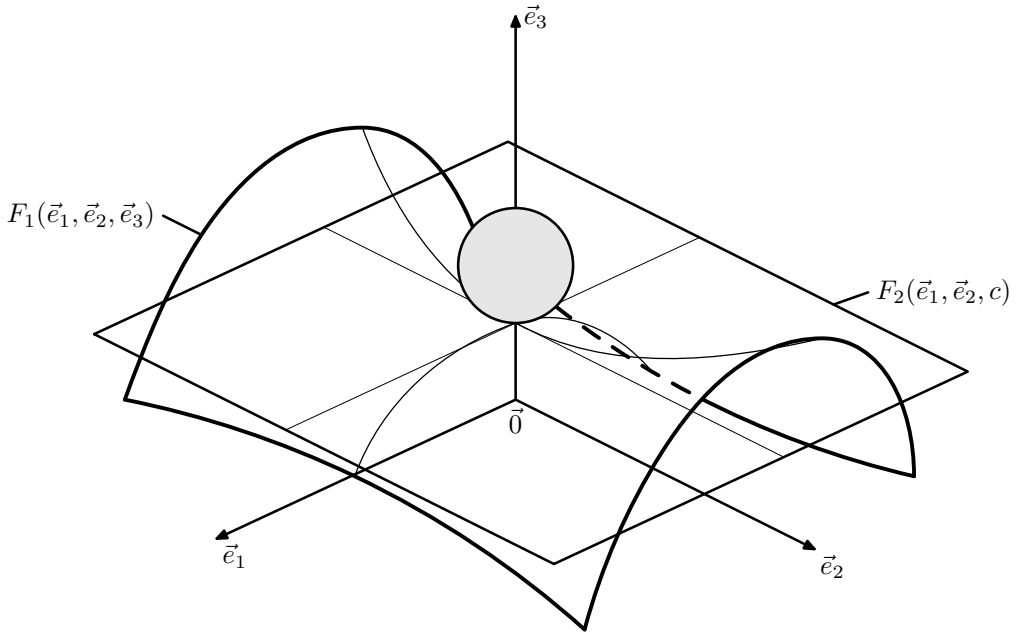


Bild 4.1: Darstellung der Gleichgewichtslagen

Die Auslenkung der Kugel in Richtung des Basisvektor $\vec{e}_2$ bedarf der Zuführung von potentieller Energie. Die Kugel kehrt in ihre Ausgangslage zurück und befindet sich damit im *stabilen* Gleichgewicht.

Die dritte Gleichgewichtslage kann ausgehend von der Potentialfläche F_2 dargestellt werden. Eine Verschiebung der Kugel ändert nicht die potentielle Energie. Die zugehörige Gleichgewichtslage ist *indifferent*.

Zur weiteren Behandlung des in Gleichung 4.3 aufgestellten Potentials mit den Mitteln der Variationsrechnung stehen im Wesentlichen zwei Möglichkeiten zur Verfügung. Zum einen können die EULERschen Differentialgleichungen abgeleitet werden und zum anderen kann für konservative Systeme eine approximierte Lösung mit dem direkten Variationsverfahren von RITZ erfolgen.

Eulersche Differentialgleichungen

Das Funktional in Gleichung 4.4 enthält neben den Verschiebungsgrößen $\underline{\vec{u}}$ und $\vec{\varphi}$ auch die konstitutiven Variablen $\vec{\varepsilon}$ und $\vec{\kappa}$, die jedoch durch partielle Ableitungen der Verschiebungsgrößen beschrieben werden können (siehe Gleichung 2.31). Die EULERsche Differentialgleichung für die Variablen S, $\underline{\vec{u}}$ und deren partielle Ableitungen lautet dann

$$\frac{\partial F}{\partial \underline{\vec{u}}}(\mathsf{S}, \underline{\vec{u}}, \underline{\vec{u}}_{,3}) - \frac{d}{d\mathsf{S}} \frac{\partial F}{\partial \underline{\vec{u}}_{,3}}(\mathsf{S}, \underline{\vec{u}}, \underline{\vec{u}}_{,3}) = 0. \tag{4.10}$$

Die Gleichung für die Variablen S, $\vec{\varphi}$ und $\vec{\varphi}_{,3}$ ergibt sich analog.

Näherungslösung nach Ritz

Alternativ zur Aufstellung der EULERschen Differentialgleichungen schlägt RITZ (1878-1909) eine Näherungslösung des Variationsproblems vor, das in Gleichung 4.5 angegeben ist. Die einzelnen Variablen werden durch Linearkombinationen der Form

$$y_n := \alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n \quad (\alpha_i \in \mathbb{R}) \tag{4.11}$$

mit endlich vielen x_i approximiert. Die Genauigkeit kann mittels vorgegebenen ϵ gewählt werden:

$$|g(y) - g(y_n)| < \epsilon. \tag{4.12}$$

Für diese Näherung wird dann

$$g(x_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n) = Extremum! \tag{4.13}$$

gefordert. Die Lösungen von Gleichung 4.13 sind dann Lösungen des Gleichungssystems

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_i} g(x_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n) = 0, \quad 1 \leq i \leq n. \tag{4.14}$$

Die x_i sind linear unabhängige, differenzierbare und vollständige Funktionen, die die geometrischen Rand- und Feldbedingungen erfüllen müssen.

4.2 Elementbeschreibung

In Abschnitt 4.1 wird ein Näherungsverfahren angegeben, das bei Anwendung auf finite Elemente mit einfachen Ansatzfunktionen auskommt. Die Genauigkeit der Berechnung, die durch den Parameter ϵ in Gleichung 4.12 festgelegt werden kann, lässt sich durch Wahl der Größe der finiten Elemente und der Güte der gewählten Ansätze beliebig erhöhen.

Berücksichtigung großer Drehungen

Das Programm ANSYS stellt für einige Elemente eine Berechnung unter Berücksichtigung großer Drehungen und kleiner Verzerrungen bereit. Dabei wird unter Verwendung der Gleichung 1.25 das Prinzip der Aufspaltung des Deformationsgradienten in Starrkörperrotation und Verzerrung verwendet.

Zur Beschreibung großer Drehungen wird der von ARGYRIS in [2] definierte und in Gleichung A.49 bereits eingeführte Pseudovektor

$$\vec{\varphi} = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}^T = \varphi \vec{f} \text{ mit } |\vec{\varphi}| = \varphi$$

verwendet. Durch Einführung des normalisierten Pseudovektors aus Gleichung A.54, siehe auch RANKIN und BROGAN in [50]

$$\vec{\omega} = \omega \vec{f} \text{ mit } \omega = \mid \vec{\omega} \mid = 2 \sin \frac{\varphi}{2}$$

folgt unter Berücksichtigung der trigonometrischen Beziehungen

$$\sin \varphi = \omega \sqrt{1 - \left(\frac{\omega}{2}\right)^2}, \cos \varphi = 1 - \frac{\omega^2}{2}$$

und der Beziehung

$$\vec{f} = \frac{\vec{\omega}}{\omega}$$

für die Drehmatrix $\mathbf{R}$ wie in Gleichung A.56 angegeben:

$$\mathbf{R} = \mathbf{I} + \sqrt{1 - \left(\frac{\omega}{2}\right)^2}\mathbf{D} + \frac{1}{2}\mathbf{D}^2.$$

Die Matrix $\mathbf{D}$ ist

$$\mathbf{D} = D_i^j = \begin{pmatrix} 0 & \omega^3 & -\omega^2 \\ -\omega^3 & 0 & \omega^1 \\ \omega^2 & -\omega^1 & 0 \end{pmatrix},$$

wie bereits in Gleichung A.52 dargestellt.

Die elastische Elementsteifigkeitsmatrix bezüglich des globalen Koordinatensystems ${}^E\mathbf{K}_e$ ergibt sich dann zu

$${}^E\mathbf{K}_e = \int_V \mathbf{T}^T \cdot \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{T} dV \tag{4.15}$$

mit

T aktualisierte Transformationsmatrix die über die Drehmatrix $\mathbf{R}$ nach Gleichung A.56 mit der Transformationsmatrix $\mathbf{T}_o$

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_o \mathbf{R} \tag{4.16}$$

verknüpft ist.

$\mathbf{T}_o$ transformiert die Elementkoordinatensysteme nach Bild A.1 in das globale Koordinatensystem

E Elastizitätsmatrix nach Gleichung 1.46

B Verzerrungs-Verschiebungsbeziehung bezüglich des Koordinatensystems der Elemente. Die Matrix **B** verknüpft die Dehnungen $\vec{\varepsilon}$ und Krümmungen $\vec{\kappa}$ mit den Verschiebungen $\vec{u}$ und den Verdrehungen $\vec{\varphi}$, wobei die Dehnungen und Krümmungen durch den Vektor $\vec{\varepsilon}$ und die Verschiebungen und Verdrehungen durch den Vektor $\vec{u}$ ausgedrückt werden, in der Form

$$\vec{\varepsilon} = \mathbf{B}\vec{u} = \mathbf{Q}\mathbf{N}\hat{\vec{u}} \tag{4.17}$$

Q Matrix in der die Verschiebungsableitungen festgelegt sind

N Matrix mit den Ansatzfunktionen.

Nun können die innere potentielle Energie eines Elementes

$$\Pi_{ie}(\vec{u}_e) = \frac{1}{2}\hat{\vec{u}}_e^T \cdot {}^E\mathbf{K}_e \cdot \hat{\vec{u}}_e \tag{4.18}$$

und das äußere Potential

$$\Pi_{aek}(\vec{u}_e) = -\hat{\vec{u}}_e^T \cdot \vec{F}_e - \hat{\vec{u}}_e^T \cdot \vec{F}_{ek} \tag{4.19}$$

mit $\vec{F}_e$ -Einwirkungsvektor für Linienkräfte und -momente, vgl. Gleichung 2.35 und $\vec{F}_{ek}$ -Einwirkungsvektor für äußere Schnittkräfte und -momente, vgl. Gleichung 2.36, angegeben werden.

Das elastische Potential des Gesamtsystems ist damit

$$\begin{aligned}\Pi(\vec{u}_e) &= \bigcup_{e=1}^{n_e} \Pi_{ie} + \bigcup_{e=1}^{n_e} (\Pi_{aek} + \Pi_{ae}) \\ &= \frac{1}{2}\bigcup_{e=1}^{n_e} (\hat{\vec{u}}_e^T \cdot {}^E\mathbf{K}_e \cdot \hat{\vec{u}}_e) - \bigcup_{e=1}^{n_e} (\hat{\vec{u}}_e^T \cdot (\vec{F}_e + \vec{F}_{ek})).\end{aligned} \tag{4.20}$$

Die erste Variation des Potentials

$$\delta\Pi(\vec{u}_e) = \bigcup_{e=1}^{n_e} \left\{ \delta\hat{\vec{u}}_e^T \cdot \left({}^E\mathbf{K}_e \cdot \hat{\vec{u}}_e - \vec{F}_e - \vec{F}_{ek} \right) \right\} \tag{4.21}$$

und die Extremalforderung des Potentials $\delta\Pi(\vec{u}_e) = 0$, dies wird als Gleichgewichtslage $\mathbf{G}(\vec{u}) = 0$ definiert, liefern das zu lösende Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}\delta\Pi(\vec{u}_e) = 0 &= \bigcup_{e=1}^{n_e} \left\{ {}^E\mathbf{K}_e \cdot \hat{\vec{u}}_e - \vec{F}_e - \vec{F}_{ek} \right\} \\ &= {}^E\mathbf{K} \cdot \hat{\vec{u}} - \vec{F} = \mathbf{G}(\vec{u}).\end{aligned} \tag{4.22}$$

Für die Berechnungen wird ein 3-dimensionales Stabelement (BEAM4 3-D Elastic Beam) verwendet. Es handelt sich um ein gerades finites Element mit 6 Freiheitsgraden je Knoten, siehe Bild 4.2. Der gesuchte Verschiebungsvektor $\hat{\vec{u}}$ enthält damit drei Verschiebungen und drei Verdrehungen je Knoten:

$$\hat{\vec{u}}^T = \{u_I, v_I, w_I, \varphi_{x,I}, \varphi_{y,I}, \varphi_{z,I}, u_J, v_J, w_J, \varphi_{x,J}, \varphi_{y,J}, \varphi_{z,J}\}. \tag{4.23}$$

Für die Formfunktionen der Komponenten der realen und virtuellen Verschiebungsvektoren werden für u, δu und φ_x, $\delta\varphi_x$ lineare Ansätze und für die übrigen Komponenten die bekannten kubischen Hermite-Polynome gewählt. In geschlossener Form werden die Ansatzfunktionen von Kohnke in [32] angegeben:

$$\begin{aligned}
u =& \frac{1}{2}\left(u_I\left(1-\mathsf{s}\right)+u_J\left(1+\mathsf{s}\right)\right)\\
v =& \frac{1}{2}\left(v_I\left(1-\frac{\mathsf{s}}{2}\left(3-\mathsf{s}^2\right)\right)+v_J\left(1+\frac{\mathsf{s}}{2}\left(3-\mathsf{s}^2\right)\right)\right)\\
&+\frac{l}{8}\left(\varphi_{z,I}\left(1-\mathsf{s}^2\right)\left(1-\mathsf{s}\right)-\varphi_{z,J}\left(1-\mathsf{s}^2\right)\left(1+\mathsf{s}\right)\right)\\
w =& \frac{1}{2}\left(w_I\left(1-\frac{\mathsf{s}}{2}\left(3-\mathsf{s}^2\right)\right)+w_J\left(1+\frac{\mathsf{s}}{2}\left(3-\mathsf{s}^2\right)\right)\right)\\
&+\frac{l}{8}\left(\varphi_{y,I}\left(1-\mathsf{s}^2\right)\left(1-\mathsf{s}\right)-\varphi_{y,J}\left(1-\mathsf{s}^2\right)\left(1+\mathsf{s}\right)\right)\\
\varphi_x =& \frac{1}{2}\left(\varphi_{x,I}\left(1-\mathsf{s}\right)+\varphi_{x,J}\left(1+\mathsf{s}\right)\right).
\end{aligned} \tag{4.24}$$

In Matrixschreibweise folgt daraus:

$$\vec{u} = \mathbf{N}\hat{\vec{u}}$$

$$
\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ \varphi_x \\ \varphi_y \\ \varphi_z \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
\frac{1}{2}a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{1}{2}\left(1-\frac{\mathsf{s}}{2}c\right) & 0 & 0 & 0 & \frac{l}{8}da & 0 & \frac{1}{2}\left(1+\frac{\mathsf{s}}{2}c\right) & 0 & 0 & 0 & -\frac{l}{8}db \\
0 & 0 & \frac{1}{2}\left(1-\frac{\mathsf{s}}{2}c\right) & 0 & \frac{l}{8}da & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}\left(1+\frac{\mathsf{s}}{2}c\right) & 0 & -\frac{l}{8}db & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}b & 0 & 0
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} u_I \\ v_I \\ w_I \\ \varphi_{xI} \\ \varphi_{yI} \\ \varphi_{zI} \\ u_J \\ v_J \\ w_J \\ \varphi_{xJ} \\ \varphi_{yJ} \\ \varphi_{zJ} \end{bmatrix}
\tag{4.25}
$$

mit

$$a = (1-\mathsf{s})$$
$$b = (1+\mathsf{s})$$
$$c = (3-\mathsf{s}^2)$$
$$d = (1-\mathsf{s}^2)$$

Die Laufvariable s ist in Bild 4.2 definiert.

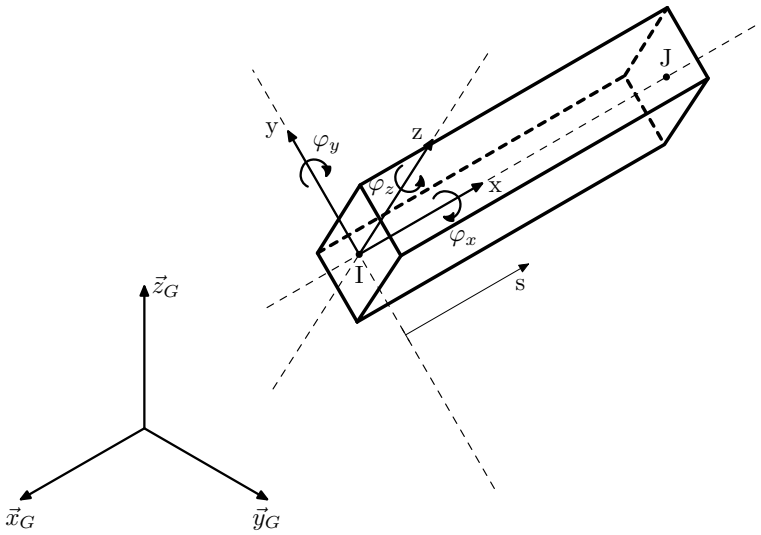


Bild 4.2: Darstellung eines Stabelementes im kartesischen Basissystem

Die elastische Elementsteifigkeitsmatrix ${}^{E}\mathbf{K}_e$ in Gleichung 4.15 ergibt sich nach Przemieniecki [48] mit

A Querschnittsfläche

E Elastizitätsmodul

G Gleitmodul

l Länge des Elementes

J Torsionsträgheitsmoment

und mit

- $\phi_y = \frac{12EI_z}{GA_y^s l^2}$

- $\phi_z = \frac{12EI_y}{GA_z^s l^2}$

I_i Trägheitsmoment normal zur Richtung i

A_i^s Schubfläche normal zur Richtung $i = A/F_i^s$

F_i^s Schubkoeffizient.

zu:

$$
{}^{E}\mathbf{K}_e = \begin{bmatrix}
\frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & \frac{12EI_z}{l^3(1+\phi_y)} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{l^2(1+\phi_y)} & 0 & \frac{-12EI_z}{l^3(1+\phi_y)} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{l^2(1+\phi_y)} \\
 & & \frac{12EI_y}{l^3(1+\phi_z)} & 0 & \frac{-6EI_y}{l^2(1+\phi_z)} & 0 & 0 & 0 & \frac{-12EI_y}{l^3(1+\phi_z)} & 0 & \frac{-6EI_y}{l^2(1+\phi_z)} & 0 \\
 & & & \frac{GJ}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{GJ}{l} & 0 & 0 \\
 & & & & \frac{(4+\phi_z)EI_y}{l(1+\phi_z)} & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{l^2(1+\phi_z)} & 0 & 0 & \frac{(2-\phi_z)EI_y}{l(1+\phi_z)} & 0 \\
 & & & & & \frac{(4+\phi_y)EI_z}{l(1+\phi_y)} & 0 & \frac{-6EI_z}{l^2(1+\phi_y)} & 0 & 0 & 0 & \frac{(2-\phi_y)EI_z}{l(1+\phi_y)} \\
 & & & & & & \frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & & & \frac{12EI_z}{l^3(1+\phi_y)} & 0 & 0 & 0 & \frac{-6EI_z}{l^2(1+\phi_y)} \\
 & & & & & & & & \frac{12EI_y}{l^3(1+\phi_z)} & 0 & \frac{6EI_y}{l^2(1+\phi_z)} & 0 \\
 & & & & & & & & & \frac{GJ}{l} & 0 & 0 \\
 & & & & & & & & & & \frac{(4+\phi_z)EI_y}{l(1+\phi_z)} & 0 \\
 & & & & & & & & & & & \frac{(4+\phi_y)EI_z}{l(1+\phi_y)}
\end{bmatrix}. \quad (4.26)
$$

Sym.

Soll jedoch mit einer linearisierten Theorie gearbeitet werden, dann kann der Einfluss der Verdrehungen auf das Gleichgewicht, dieser tritt bei schlanken Stabtragwerken mit einem kleinen Verhältnis von Biegesteifigkeit zu axialer Steifigkeit auf, durch die Berücksichtigung der geometrischen Elementsteifigkeitsmatrix ${}^{G}\mathbf{K}_e$ abgeschätzt werden. Die Linearisierung der Elementsteifigkeitsmatrix erfolgt durch Zerlegung der elastischen Steifigkeitsmatrix in lineare, geometrische und Anfangsverschiebungsmatrizen:

$$ {}^{E}\mathbf{K}_e = {}^{L}\mathbf{K}_e + {}^{G}\mathbf{K}_e + {}^{U}\mathbf{K}_e. \tag{4.27} $$

Die geometrische Elementsteifigkeitsmatrix wird in der Literatur, z.B. bei Wagner in [58], auch oft als Anfangsspannungsmatrix bezeichnet. Für die verwendeten Stabelemente ist die geometrische Elementsteifigkeitsmatrix ${}^{G}\mathbf{K}_e$ bei Vernachlässigung der Schubdeformationen $\gamma_{\alpha 3}$ und Annahme einer konstanten Normalkraft $N = \frac{EA}{l}(u_J - u_I) \simeq const$ im Stab gegeben durch:

$$ {}^{G}\mathbf{K}_e = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{6N}{5l} & 0 & 0 & 0 & \frac{N}{10} & 0 & \frac{-6N}{5l} & 0 & 0 & 0 & \frac{N}{10} \\ & & \frac{6N}{5l} & 0 & \frac{-N}{10} & 0 & 0 & 0 & \frac{-6N}{5l} & 0 & \frac{-N}{10} & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & \frac{2Nl}{15} & 0 & 0 & 0 & \frac{N}{10} & 0 & \frac{-Nl}{30} & 0 \\ & & & & & \frac{2Nl}{15} & 0 & \frac{-N}{10} & 0 & 0 & 0 & \frac{-Nl}{30} \\ & & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & \frac{6N}{5l} & 0 & 0 & 0 & \frac{-N}{10} \\ & & & & & & & & \frac{6N}{5l} & 0 & \frac{N}{10} & 0 \\ & & Sym. & & & & & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & & \frac{2Nl}{15} & 0 \\ & & & & & & & & & & & \frac{2Nl}{15} \end{bmatrix}. \tag{4.28} $$

Berücksichtigung endlicher Drehungen

Zur Berechnung endlicher Drehungen wird ein vom Element unabhängiges die Drehung begleitendes Verfahren, siehe Rankin und Brogan in [50], verwendet. Dabei wird der Anteil der Starrkörperbewegung des Elementes an der Gesamtverschiebung vor der Elementberechnung separiert. Damit ist es möglich Elemente für große Drehungen zur Berechnung von endlichen Drehungen zu benutzen, solange die lokalen Drehungen elementkonform bleiben.

Beispiel 3: Auskragender Biegestab mit Randmoment

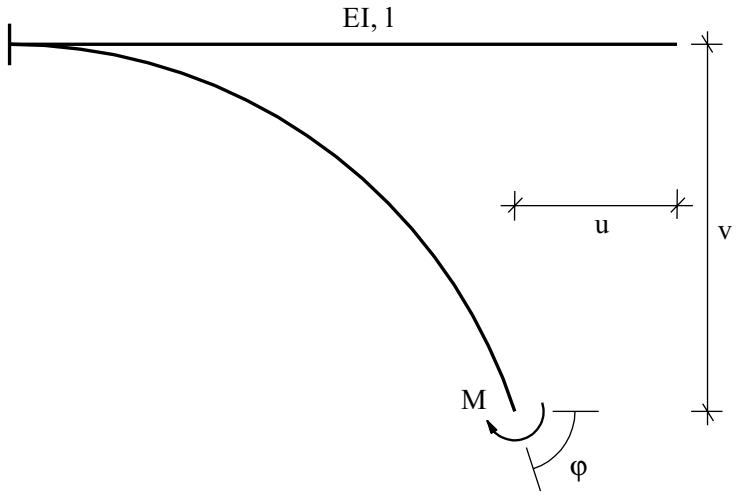


Bild 4.3: Biegestab mit Randmoment

Die Überprüfung der in Abschnitt 4.2 dargestellten Fähigkeiten der Stabelemente und des Verfahrens zur Beschreibung endlicher Drehungen erfolgt anhand des bekannten auskragenden Biegestabes unter Randmomenteneinwirkung, in Bild 4.3 dargestellt, vgl. ARGYRIS [3] und RAMM [49]. Der auskragende Biegestab wird durch 5 finite Elemente diskretisiert.

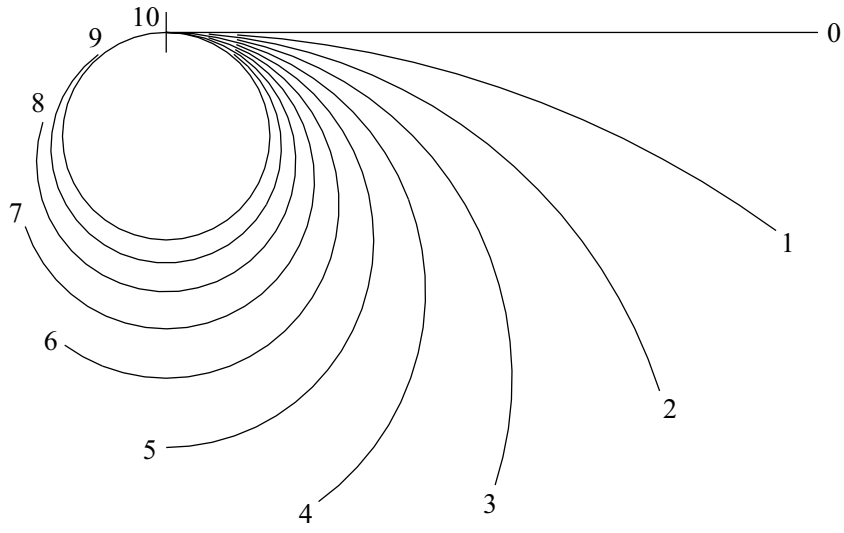


Bild 4.4: Konfigurationen für $M_i = \varphi_i \frac{EI}{l}$, $\varphi_i = \frac{i}{5}\pi$ mit $i = 0, ..., 10$

In Bild 4.4 ist der verformte Stab für verschiedene Lastniveaus dargestellt. Der endgültige Verformungszustand wurde dabei in 9 Lastschritten ermittelt. Die Mo-

menten-Verschiebungs- bzw. Verdrehungsbeziehungen der numerischen Simulation zeigen nur geringe Abweichungen von der analytischen Lösung, siehe Bild 4.5.

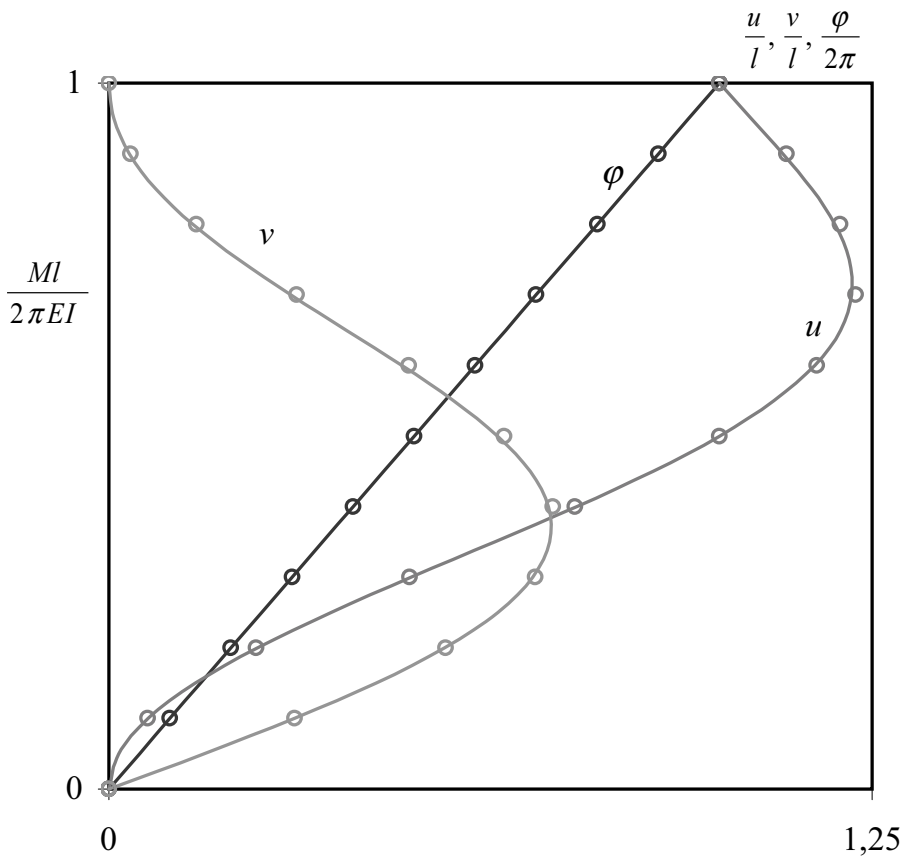


Bild 4.5: Momenten-Verschiebungs- bzw. Verdrehungsbeziehungen

4.3 Berechnungsmodell

Eine Untersuchung räumlicher Stabwerke mittels finiter Elemente bedarf der Aufstellung eines idealisierten, in der Regel von der Realität abweichenden, Modells. Die Idealisierungen müssen so gewählt werden, dass das zu untersuchende Problem ausreichend genau beschrieben werden kann. Letztendlich sollen die Ergebnisse für die Praxis aufbereitet werden, d.h. von der Richtigkeit der Resultate kann die Sicherheit von Menschenleben abhängen. Den hier verwendeten Modellen liegen ausgeführte Objekte bzw. Teile von Bauwerken zugrunde.

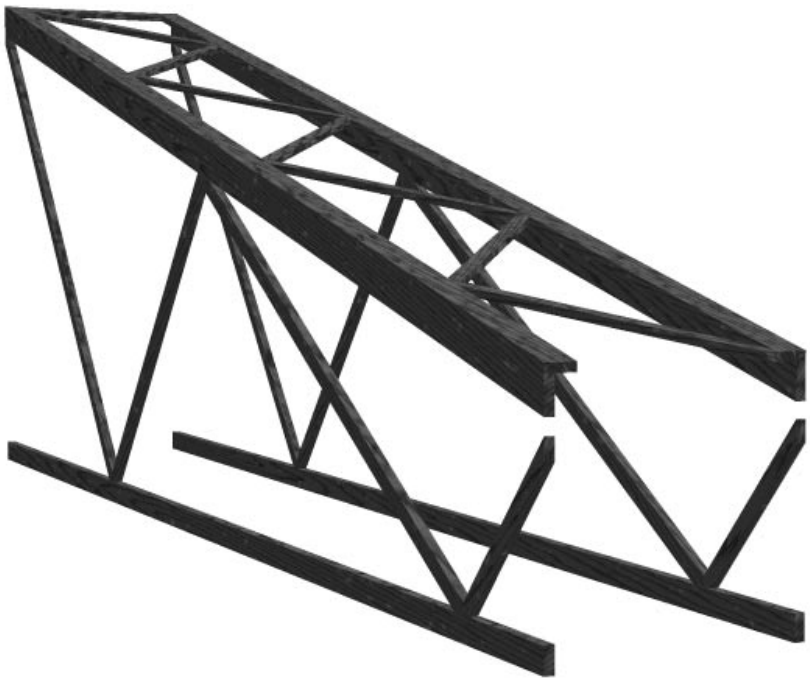


Bild 4.6: Reales Stabtragwerk

Idealisierungen in diesem Sinne sind:

Idealisierung 1: Beschränkung der volumenhaften Stabwerke auf die Stabachsen, wie dies in Kapitel 2 angegeben wird

Idealisierung 2: Approximation gekrümmter Stäbe durch gerade finite Elemente, auch in der geometrisch imperfekten Konfiguration

Idealisierung 3: Vernachlässigung von Ausmittigkeiten in den Verbindungen der Stäbe

Idealisierung 4: Zusammenschieben der, infolge der aus Querschnittsabmessungen resultierenden, parallel verlaufenden Stabachsen

Idealisierung 5: Annahme eines ideal elastischen Werkstoffgesetzes

Idealisierung 6: Imperfektionen sind affin zum niedrigsten Eigenwert der zu untersuchenden Struktur.

Bild 4.6 zeigt ein reales Stabtragwerk. Nach Einführung der Idealisierungen 1 bis 5 und Benutzung der Abbildung ${}^0\chi$ aus Gleichung 1.3 kann die Geometrie des Modells in der Referenzkonfiguration angegeben werden, siehe Bild 4.7.

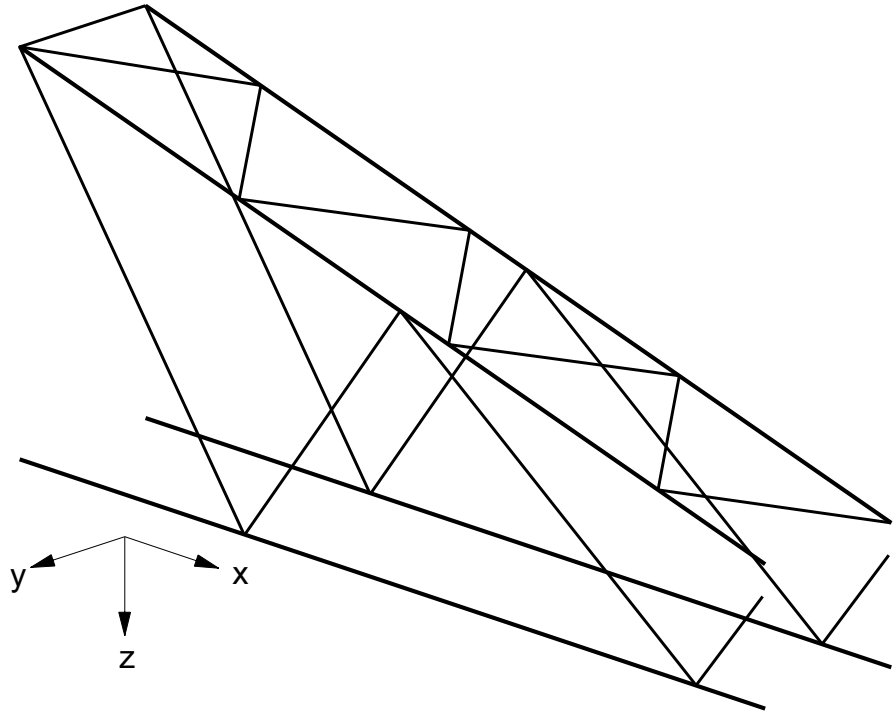


Bild 4.7: Modell aus Bild 4.6 in der Referenzkonfiguration

Festlegung der Systemdaten

Ausgehend von den zu modellierenden realen Stabwerken werden die Koordinaten der einzelnen Knotenpunkte des FE-Modells in der Referenzkonfiguration bezüglich einer kartesischen $x-y-z-$ Basis durch die in Gleichung 1.3 angegebene Abbildung ${}^0\chi$ festgelegt. Dabei werden die Punkte der volumenhaften Stäbe mit Gleichung 2.2 auf die Stabachse S bezogen. Für die Erstellung der elastischen Elementsteifigkeitsmatrix nach Gleichung 4.26 sind weiterhin die Angabe des Elastizitätsmoduls, des Gleitmoduls, der Querschnittsabmessungen und der zugehörigen Querschnittswerte erforderlich.

4.4 Berechnung

Ist die Gesamtsteifigkeitsmatrix ${}^E\mathbf{K}$ nichtlinear von den Verschiebungen abhängig, kann die Aufstellung nur iterativ erfolgen. In einem Iterationsschritt i wird die Steifigkeit des Systems durch die Tangentensteifigkeitsmatrix ${}^T\mathbf{K}$ ausgedrückt. Die Bestimmungsgleichung einer Gleichgewichtslage $\delta\Pi(\vec{u}) = \mathbf{G}(\vec{u}) = 0$ in Gleichung 4.22 wird für die iterative Berechnung um den Lastparameter λ erweitert. Die ver-

allgemeinerte Gleichgewichtslage lautet nun:

$$\delta\Pi(\vec{u},\lambda) = \mathbf{G}(\vec{u},\lambda) = \mathbf{K}\cdot\vec{u} - \lambda\vec{F} = \vec{0}. \tag{4.29}$$

Ausgehend von der geometrisch imperfekten Konfiguration kann nun eine nichtlineare Analyse durchgeführt werden. Da Imperfektionen einen wesentlichen Einfluss auf die Last-Verformungsgeschichte haben können, muss die Idealisierung 6 sichergestellt werden. Dazu wird ausgehend von der Referenzkonfiguration eine Eigenwertanalyse durchgeführt. Anschließend werden unter Berücksichtigung der Ergebnisse aus Abschnitt 5.2.3 die Verschiebungsvektoren $\vec{u}$ der Eigenformen separiert, skaliert und mit den Gleichungen 5.1 und 5.2 die imperfekten Modelle erzeugt.

4.4.1 Eigenwertanalyse

In Abschnitt 4.1 wird die zweite Variation des elastischen Potentials als Kriterium für die Art der Gleichgewichtslage verwendet. Bei der klassischen Eigenwertanalyse genügt es zur Ermittlung eines kritischen Punktes die Indifferenz der Gleichgewichtslage zu fordern, siehe auch Pflüger in [47]. Zu einem vorhandenen Gleichgewichtszustand $\mathbf{G}(\breve{\vec{u}},\breve{\lambda})$ existiert ein benachbarter Gleichgewichtszustand ${}^{N}\mathbf{G}(\tilde{\vec{u}},\breve{\lambda})$ mit gleichem $\breve{\lambda}$. Daraus folgt

$${}^{N}\mathbf{G}(\tilde{\vec{u}},\breve{\lambda}) = {}^{N}\mathbf{G}(\breve{\vec{u}}+\delta\vec{u},\breve{\lambda}) = \mathbf{G}(\breve{\vec{u}},\breve{\lambda}) + \mathbf{K}(\breve{\vec{u}},\breve{\lambda})\cdot\delta\vec{u} \tag{4.30}$$

und mit der Forderung, dass auch der Nachbarzustand eine Gleichgewichtslage ist ${}^{N}\mathbf{G}(\breve{\vec{u}}+\delta\vec{u},\breve{\lambda}) = \vec{0}$, ergibt sich das homogene Gleichungssystem

$$\mathbf{K}(\breve{\vec{u}},\breve{\lambda})\cdot\delta\vec{u} = \vec{0}. \tag{4.31}$$

Die Determinantenbedingung $\det\mathbf{K} = 0$ liefert die nichttrivialen Lösungen des Gleichungssystems in Gleichung 4.31. Werden die Vorknickverschiebungen bezüglich des Lastparameters λ in eine Potenzreihe entwickelt, vgl. Wagner in [58], und nach dem ersten Glied abgebrochen, kann ein lineares Eigenwertproblem formuliert werden:

$$\left\{\mathbf{K} - \lambda_i\,{}^{G}\mathbf{K}\right\}\phi_i = \vec{0}. \tag{4.32}$$

Der Lastparameter λ_i ist der i-te Eigenwert und ϕ_i der zugehörige Eigenvektor.

4.4.2 Nichtlineare Berechnung

In Abschnitt 4.4.1 wird die lineare Eigenwertanalyse eingeführt. Ausgehend von den dabei ermittelten Eigenformen, welche durch den zum Lastparameter λ_i gehörigen Eigenvektor ϕ_i gekennzeichnet sind, wird das geometrisch imperfekte Modell erstellt. Die durch ϕ_i definierte Geometrie des Modells wird in globale und lokale

Anteile nach Kapitel 5 aufgespalten. Damit ist die Erstellung einer möglichst affinen Imperfektion möglich und gleichzeitig kann die Größe der einzelnen Anteile angegeben werden. Die endgültige Geometrie des imperfekten Systems wird nun durch die Abbildung ϕ_{t_I,t_0} in Gleichung 1.9 erzeugt.

Die anschließende nichtlineare Berechnung erfolgt, wie in Abschnitt 4.4 beschrieben, iterativ. Die bekanntesten Rechenverfahren sind das NEWTON-RAPHSON- und das Bogenlängenverfahren. STEIN und KESSEL benutzen in [55] das NEWTON-Verfahren zur Berechnung geometrisch nichtlinearer Stabwerke im unter- und überkritischen Bereich. Dabei zeigen sie auch die Schwierigkeiten und Beschränkungen dieses Verfahrens auf.

Newton-Raphson-Verfahren

Gleichung 4.29 beschreibt den Gleichgewichtszustand eines statischen Systems, das in den Verschiebungen $\vec{u}$ nichtlinear ist. Ausgehend von einem bekannten Gleichgewichtszustand $\mathbf{G}(\breve{\vec{u}}, \breve{\lambda})$ wird der nächste Gleichgewichtszustand wie in Tabelle 4.1 angegeben erreicht.

Tabelle 4.1: Iterative Ermittlung der Verschiebungen

Schritt	Steifigkeit	Verschiebungsänderung
1	${}^{T}\mathbf{K}(\vec{u}_0)\Delta\vec{u}_0 = -\mathbf{G}(\vec{u}_0, \breve{\lambda})$	$\vec{u}_1 = \vec{u}_0 + \Delta\vec{u}_0$
2	${}^{T}\mathbf{K}(\vec{u}_1)\Delta\vec{u}_1 = -\mathbf{G}(\vec{u}_1, \breve{\lambda})$	$\vec{u}_2 = \vec{u}_1 + \Delta\vec{u}_1$
3	${}^{T}\mathbf{K}(\vec{u}_2)\Delta\vec{u}_2 = -\mathbf{G}(\vec{u}_2, \breve{\lambda})$	$\vec{u}_3 = \vec{u}_2 + \Delta\vec{u}_2$
⋮	⋮	⋮
n	${}^{T}\mathbf{K}(\vec{u}_{n-1})\Delta\vec{u}_{n-1} = -\mathbf{G}(\vec{u}_{n-1}, \breve{\lambda})$	$\vec{u}_n = \vec{u}_{n-1} + \Delta\vec{u}_{n-1}$
	Gesamtverschiebung	$\vec{u}_n = \vec{u}_0 + \sum_{i=0}^{n} \Delta\vec{u}_i$

Die Berechnung kann allgemein unter Berücksichtigung großer Drehungen mit der Tangentensteifigkeitsmatrix ${}^{T}\mathbf{K}$, siehe Tabelle 4.1, oder alternativ für kleine Drehungen mit der linearen Steifigkeitsmatrix ${}^{L}\mathbf{K}$ und zusätzlicher Berücksichtigung der geometrischen Steifigkeitsmatrix ${}^{G}\mathbf{K}$ erfolgen. Die Abfrage der Konvergenz erfolgt nach jedem Lastschritt durch Überprüfung der Gleichgewichtslage $\mathbf{G}(\vec{u}_{i+1}, \breve{\lambda})$.

Bogenlängenverfahren

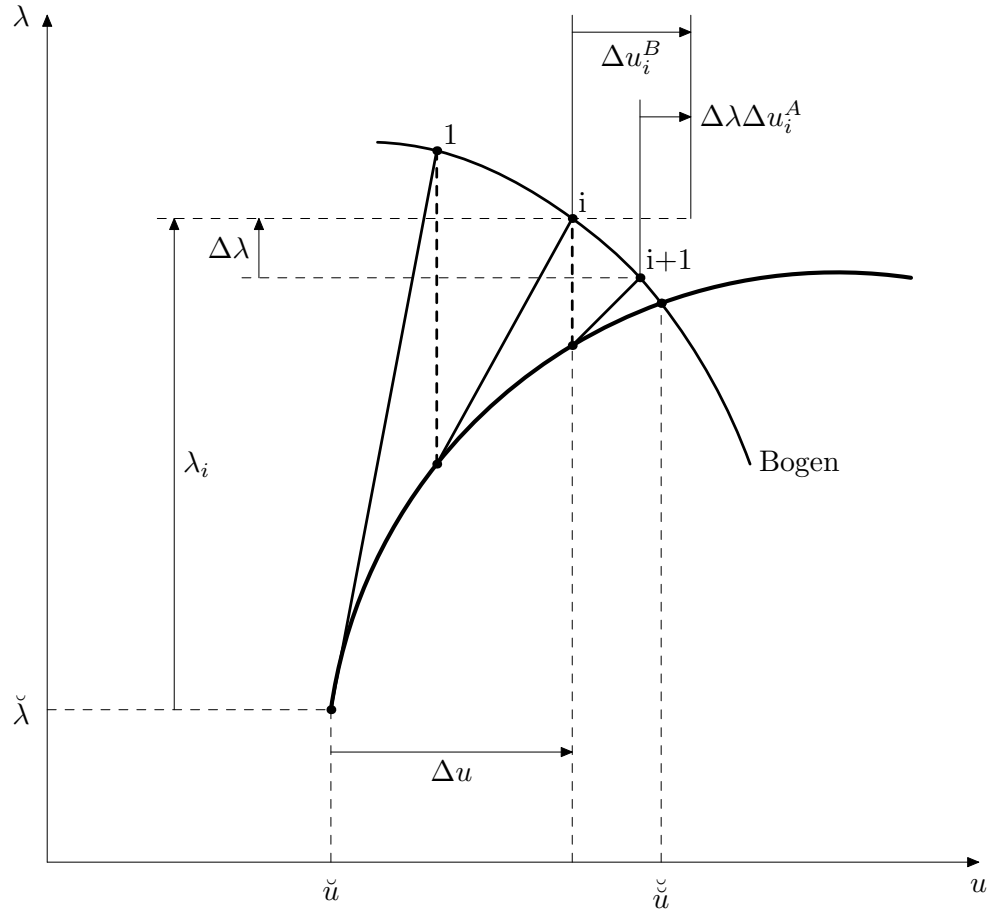


Bild 4.8: Bogenlängenverfahren

Soll nun der Zusammenhang zwischen λ und $\vec{u}$ ermittelt werden, ist Gleichung 4.29 um eine Nebenbedingung zu erweitern:

$$\check{\mathbf{G}}(\vec{u},\lambda) = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{G}(\vec{u},\lambda) \\ f(\vec{u},\lambda) \end{array} \right\}. \tag{4.33}$$

Wird diese Gleichung an einem bekannten Punkt $\breve{\vec{u}}, \breve{\lambda}$ linearisiert folgt:

$$\left(\begin{array}{cc} \mathbf{G}_{\vec{u}} & \mathbf{G}_{\lambda} \\ f_{\vec{u}}^T & f_{\lambda} \end{array} \right) \left\{ \begin{array}{c} \Delta\vec{u} \\ \Delta\lambda \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{G} \\ f \end{array} \right\} \tag{4.34}$$

mit $\mathbf{G}_{\vec{u}} = {}^T\mathbf{K}$

$\mathbf{G}_{\lambda} = -\vec{F}.$

Die in Tabelle 4.1 angegebene Beziehung ${}^{T}\mathbf{K}(\vec{u}_i)\Delta\vec{u}_i = -\mathbf{G}(\vec{u}_i, \breve{\lambda})$ wird bezüglich des Lastparameters $\breve{\lambda}$ weiter spezifiziert:

$$ {}^{T}\mathbf{K}(\vec{u}_i)\Delta\vec{u}_i - \Delta\lambda\vec{F} = (\breve{\lambda} + \lambda_i)\vec{F} - \vec{F}_i^r = -\mathbf{G}(\vec{u}_i, \breve{\lambda}). \tag{4.35} $$

Die Verschiebungsänderung $\Delta\vec{u}_i$ kann mit Gleichung 4.35 in zwei Anteile aufgespalten werden

$$ \Delta\vec{u}_i = \Delta\lambda\Delta\vec{u}_i^A + \Delta\vec{u}_i^B \tag{4.36} $$

mit $\Delta\vec{u}_i^A = {}^{T}\mathbf{K}(\vec{u}_i)^{-T}\vec{F}$

$\Delta\vec{u}_i^B = -{}^{T}\mathbf{K}(\vec{u}_i)^{-T}\mathbf{G}(\vec{u}_i, \breve{\lambda})$

und $\Delta\vec{u}_i^A$ Verschiebung infolge Einheitslastfaktor

$\Delta\vec{u}_i^B$ Verschiebungsänderung des Newton-Raphson Verfahrens.

Bild 4.8 zeigt den Ablauf des Bogenlängenverfahrens mit vollständiger Newton-Raphson-Iteration, vgl. Forde und Stiemer in [17]. Der inkrementelle Lastfaktor $\Delta\lambda$ wird mit der Bogenlängengleichung ermittelt:

$$ l_i^2 = \lambda_i^2 + \beta^2\Delta\vec{u}_n^T\Delta\vec{u}_n, \tag{4.37} $$

mit β Skalierungsfaktor

$\Delta\vec{u}_n$ Summe aller Verschiebungsänderungen dieser Iteration.

Mit den Gleichungen 4.36 und 4.37 kann nun der Lösungsvektor bestimmt werden.

Kapitel 5

Imperfektionen

Einen wesentlichen Einfluss auf die Tragfähigkeit von räumlichen Stabwerken haben Imperfektionen. Für die hier untersuchten Tragwerke aus Holz lassen sich die folgenden wesentlichen Imperfektionsarten angeben:

- imperfekte Geometrie
- imperfekte Lasteinleitung
- imperfektes Material.

Geometrische Imperfektionen

Zu den geometrischen Imperfektionen zählen im wesentlichen die Formabweichungen. Das können, bezogen auf Stabwerke, ungewollte Verdrehungen und Verkrümmungen der Stabachse oder abweichende Stabquerschnitte sein. In den Jahren 1998-2000 wurde eine von der DGfH betreute und der AiF geförderte Untersuchung der tatsächlich auftretenden geometrischen Imperfektionen an Nagelplattenkonstruktionen durchgeführt. Die dort gemessenen Daten sind statistisch ausgewertet worden. In Abschnitt 5.1 werden die geometrischen Imperfektionen am Beispiel eines Satteldachbinders in W-Form (Bild 5.1) definiert und die Ergebnisse der Messungen in Form von Vorschlägen für die Norm in Abschnitt 5.2.3 dargestellt.

Imperfekte Lasteinleitung

Diese Imperfektionsart enthält Ungenauigkeiten bei der Verbindung der Stäbe. Dazu zählen Abweichungen der angenommenen und vorhandenen Spannungsverteilungen ebenso wie die aus unterschiedlichen Verteilungen der Spannungen resultierenden Exzentrizitäten.

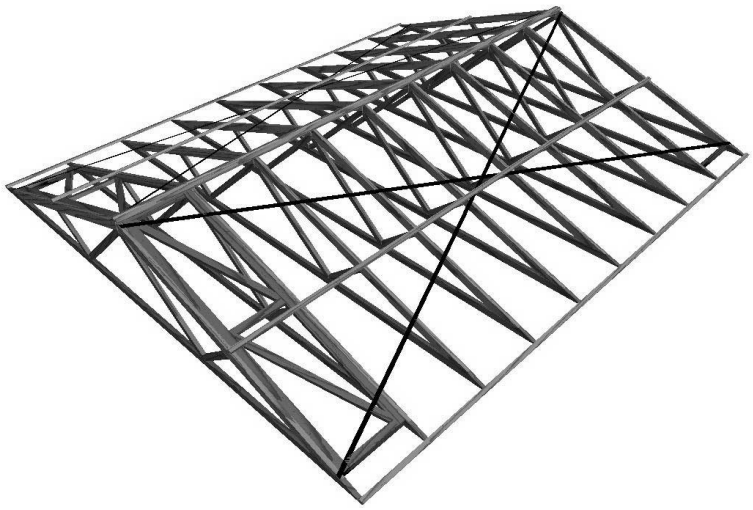


Bild 5.1: Typische Nagelplattenbinderkonstruktion

Materialimperfektionen

Materialimperfektionen umfassen alle Abweichungen des verwendeten Materials von dem im idealisierten Modell zugrunde gelegten. Für den Werkstoff Holz bedeutet dies, dass z.B. Schrägfasrigkeit, Drehwuchs u.ä. Imperfektionen darstellen, die auch durch orthotropes Material schwer oder gar nicht abgebildet werden können.

5.1 Definition der geometrischen Imperfektionen

In Bild 5.1 ist ein Teil einer symmetrischen Satteldachkonstruktion in Nagelplattenbauart dargestellt. Sie besteht aus 10 einzelnen Primärsystemen, den Dreieckbindern, die durch zwei in der Obergurtebene zwischen den ersten beiden Dreieckbindern angeordneten parallelgurtigen Fachwerkbinder, durch ein diagonal vom First zur Traufe befestigtes Windrispenpaar und durch die zugehörigen Pfettenstränge zum Sekundärsystem ergänzt werden.

Zum Zweck einer einfachen und übersichtlichen Darstellung werden im weiteren alle Betrachtungen an einem Binder beschrieben. Da in der Tragwerksplanung die Beanspruchungen des Sekundärsystems an einem aus seinen Systemachsen gebildeten idealisierten statischen Modell berechnet werden, werden auch hier der einzelne Binder auf seine Stabachsen reduziert und alle Imperfektionen in Bezug auf dieses Modell angegeben, siehe hierzu auch Abschnitt 4.3.

Es wird als orthonormale Basis ein x-y-z Rechtssystem, wie in Bild 5.2 dargestellt, eingeführt. In den folgenden Abschnitten werden weitere, im Ingenieurwesen weitaus gebräuchlichere, Bezeichnungen eingeführt und in Beziehung zu den in den Kapiteln 1 und 2 verwendeten gesetzt.

5.1.1 Perfekter Binder

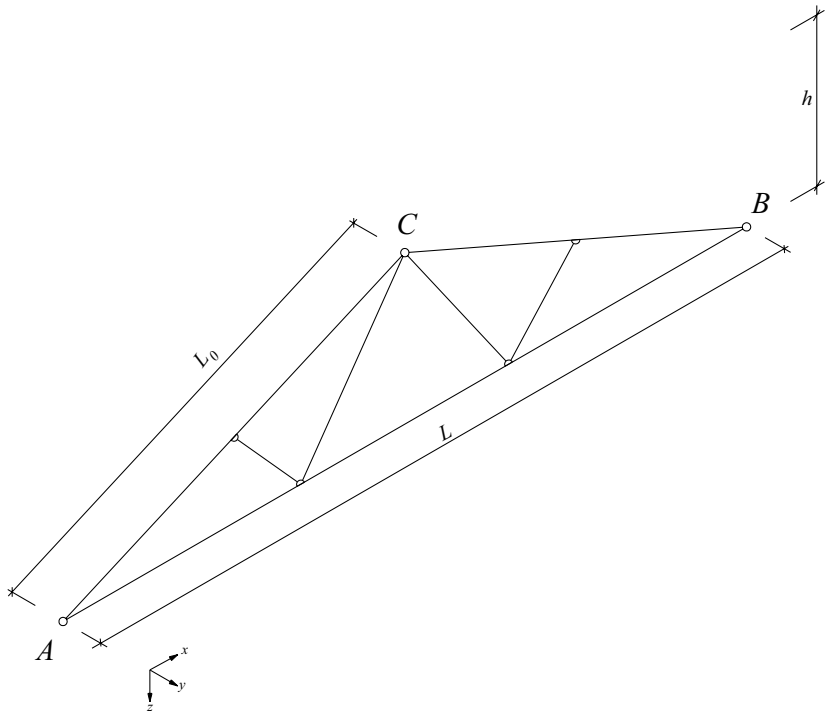


Bild 5.2: Modell eines Dreieckbinders der W - Form

Das in Bild 5.2 dargestellte Modell eines Dreieckbinders ist in dem Sinne perfekt, dass alle Stabachsen in einer zur x-z-Ebene parallelen Ebene liegen. Das Modell ist dann perfekt eben und steht perfekt lotrecht. Es stellt genau die angestrebte Referenzkonfiguration, siehe hierzu Abschnitt 1.1.1, eines Binders dar. Diese Konfiguration ist unverformt und spannungsfrei.

5.1.2 Imperfekter Binder

Ein Binder ist dann imperfekt, wenn sein zugehöriges Modell von der in Bild 5.2 beschriebenen Referenzkonfiguration geometrisch abweicht, aber immer noch spannungsfrei ist. Der Binder befindet sich dann in der in Abschnitt 1.1.3 definierten Lage. Die geometrischen Imperfektionen werden durch die in y-Richtung messbaren Abweichungen $\triangle a$ vom perfekten Binder beschrieben.

Abweichungen der Punkte A und B von der perfekten Position auf der Unterkonstruktion werden hier nicht behandelt.

Im Folgenden wird angenommen, dass sich die Geometrie des Modells jedes beliebig geometrisch imperfekten Binders durch die Abbildung ϕ_{t_o,t_i} aus Gleichung 1.9 beschreiben lässt. Da die geometrisch imperfekte Lage wegen der angegebenen

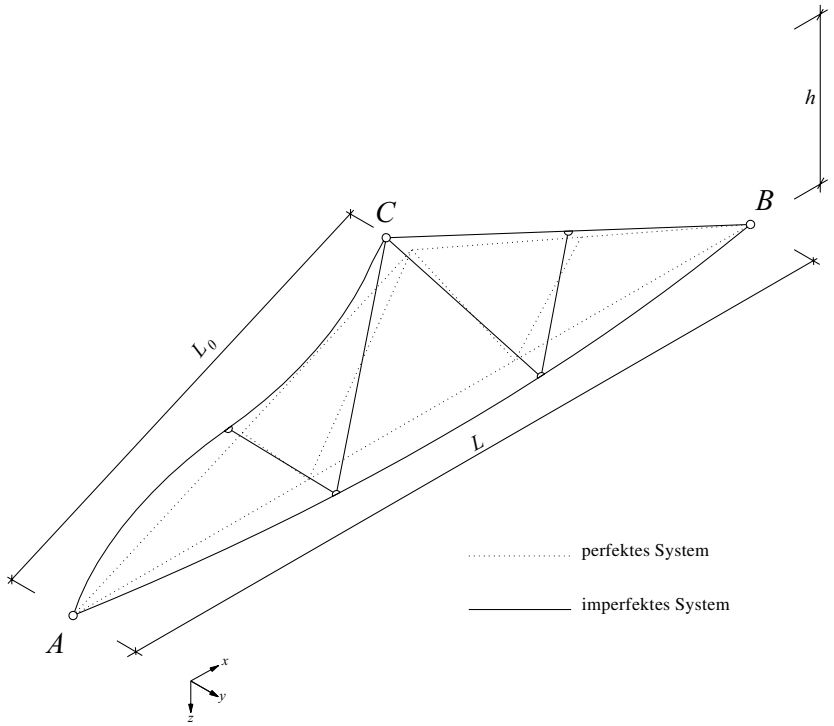


Bild 5.3: Modell eines imperfekten Dreieckbinders

Restriktionen durch Addition der Imperfektion I

$$I = \left\{ i_G \in \mathbb{R} \;\middle|\; i_G(x,z) = \sum_{j=1}^{n_G} \left(e_{G,j} \sin j \frac{k\pi}{L} x \right) - z_G \varphi_0 \;\middle|\; \begin{array}{ll} k=1 & \text{für } e_{U,j} \\ k=2 & \text{sonst} \end{array} \right\} \tag{5.1}$$

zum geometrisch perfekten Modell erzeugt werden kann, lässt sich Gleichung 1.9 etwas einfacher darstellen.

$$\phi_{t_I,t_0} : \left\{ \begin{array}{lcl} {}^0\mathrm{B} & \rightarrow & {}^I\mathrm{B} \\ \\ \vec{X} & \mapsto & {}^I\vec{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 + I \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y + i_G \\ z \end{pmatrix} \end{array} \right. \tag{5.2}$$

Der Index G steht für den Bereich, in dem die Imperfektion i_G beschrieben wird.

Als Beispiel ist in Bild 5.3 das Modell eines imperfekten Binders für $\varphi_0 < 0$ und bereichsweise unterschiedlichen n_G und e_{Gj} dargestellt.

Bereich Obergurt links: $e_{Ol,2} < 0$ sonst $e_{Ol,j} = 0$ für alle j

Bereich Obergurt rechts: $e_{Or,j} = 0$ für alle j

Bereich Untergurt: $e_{U,1} > 0$ sonst $e_{U,j} = 0$ für alle j

Wie Gleichung 5.1 und Bild 5.3 zeigen, setzt sich die Imperfektion I aus zwei Anteilen zusammen. Im Hinblick auf eine Verwendung der Ergebnisse in einer Norm, werden diese Anteile als globale und lokale Imperfektionen bezeichnet.

Globale Imperfektion

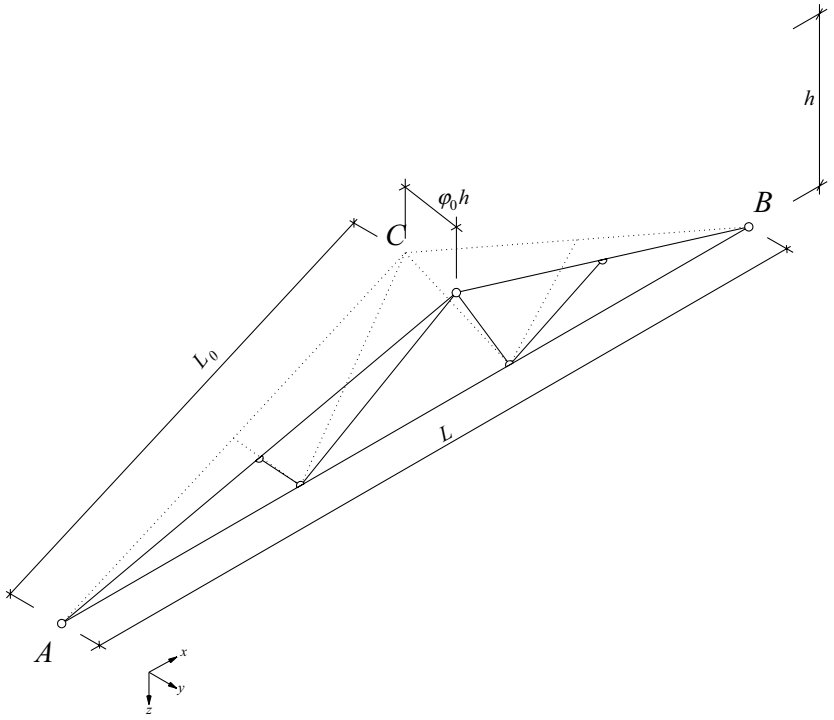


Bild 5.4: Globale Imperfektion

Die globale Imperfektion I_{φ_0} beschreibt die Abweichung des Binders von der lotrechten Position durch den Winkel φ_0 (Bild 5.4). Für kleine Winkel φ_0, beachte die Definition der Winkel in Kapitel 3, gilt

$$I_{\varphi_0} = \{i_{\varphi_0,G} \in \mathbb{R} \mid i_{\varphi_0,G}(x,z) = -z_G\varphi_0\} \tag{5.3}$$

und für die Abweichungen der Stabachsen der Obergurte von der Referenzkonfiguration kann geschrieben werden

$$i_{\varphi_0,Ol}(x,z) = \frac{2h}{L}x\varphi_0,\ 0 \le x \le \frac{L}{2} \text{ mit } z_{Ol} = -\frac{2h}{L}x \tag{5.4}$$

und

$$i_{\varphi_0,Or}(x,z) = 2h\left(1-\frac{x}{L}\right)\varphi_0,\ \frac{L}{2} < x \le L \text{ mit } z_{Or} = 2h\left(\frac{x}{L}-1\right). \tag{5.5}$$

Die Imperfektion im Firstpunkt C hat dann die Größe $i_{\varphi_0,C} = \varphi_0 h$.

Lokale Imperfektion

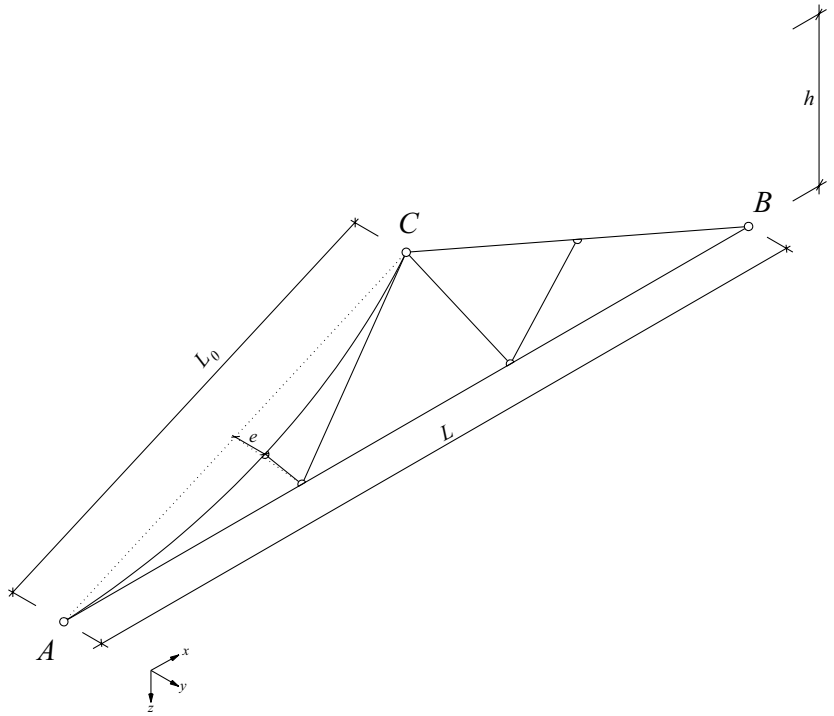


Bild 5.5: Lokale Imperfektion des Binderobergurtes

Die lokale Imperfektion I_e beschreibt die Abweichungen der Stabachsen der Gurtstäbe von einer Gerade und wird im folgenden auch als Vorkrümmung bezeichnet. Die allgemeine Beschreibung der Imperfektion nach Gleichung 5.1 kann dann für jeden einzelnen Gurtabschnitt wie folgt angegeben werden:

$$i_{e,Ol}(x,z) = \sum_{j=1}^{n_{Ol}} e_{Ol,j} \sin j\frac{2\pi}{L}x,\ 0 \le x \le \frac{L}{2} \text{ mit } z_{Ol} = \frac{2h}{L}x \tag{5.6}$$

$$i_{e,Or}(x,z) = \sum_{j=1}^{n_{Or}} e_{Or,j} \sin j2\pi\left(1-\frac{x}{L}\right),\ \frac{L}{2} < x \le L \text{ mit } z_{Or} = 2h\left(\frac{x}{L}-1\right) \tag{5.7}$$

$$i_{e,U}(x,z) = \sum_{j=1}^{n_U} e_{U,j} \sin j\frac{\pi}{L}x,\ \text{mit } z_U = 0. \tag{5.8}$$

In Bild 5.5 ist eine mögliche lokale Imperfektion für den Bereich Obergurt links dargestellt: $e_{Ol,1} > 0$, sonst $e_{Ol,j} = 0$ für alle j.

5.2 Statistische Untersuchung

5.2.1 Elemente der Stichprobe

Im Rahmen des auf Seite 67 erwähnten FE-Vorhabens wurden aus der Grundgesamtheit, deren nähere Erläuterung vom Autor in [28] angegeben wird, 45 Binder aus 13 Bauvorhaben durch eine repräsentative Stichprobenauswahl gezogen.

5.2.2 Verteilungshypothese

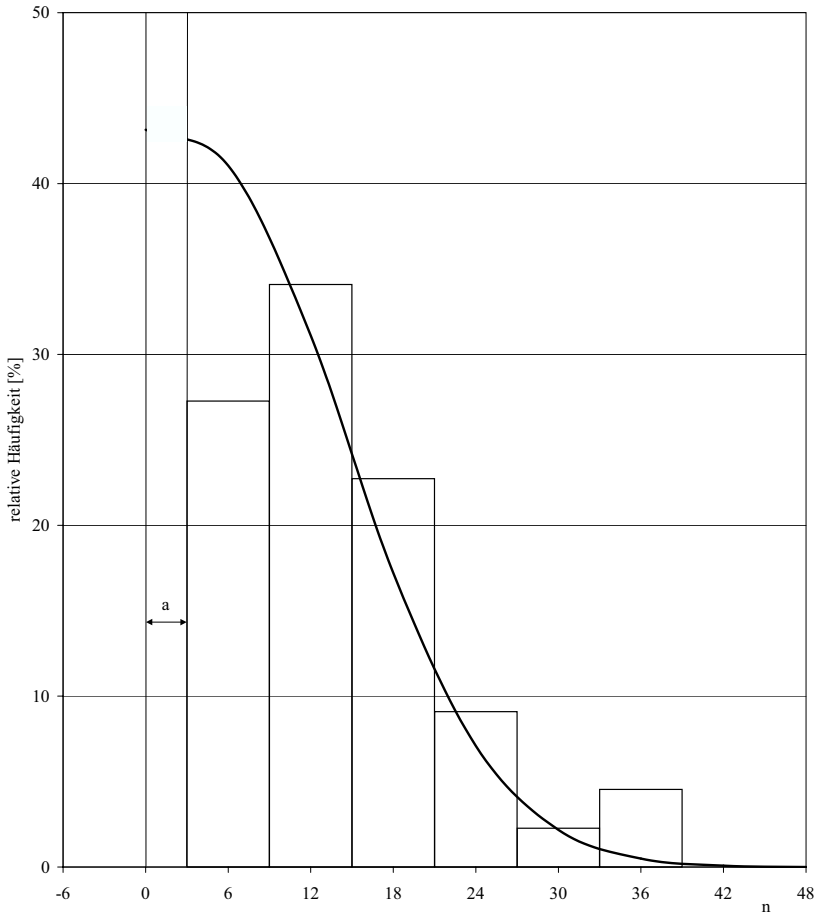


Bild 5.6: Gefaltete Normalverteilung mit Verschiebefaktor a

Merkmale von Baustoffen, Bauteilen und Konstruktionen, wie Gewicht, Steifigkeit oder Festigkeit, deren Messwerte immer positiv sind, werden in der Regel als normalverteilt angenommen.

Im Unterschied hierzu sind Merkmale von Konstruktionen, wie Geradheit, Ebenheit oder Neigung, gerichtete Größen, deren Messwerte positiv oder negativ sein können.

Da jedoch die hier tatsächlich gemessenen Vorzeichen vom Standort des Betrachters abhängig waren, der für jedes Bauvorhaben neu und willkürlich gewählt werden musste, ist die erforderliche Zufälligkeit der Beobachtung der Richtung nicht gegeben.

Es wird hier zwar weiterhin von einer normalverteilten Grundgesamtheit ausgegangen; der negative Teil der Messwerte wird jedoch gefaltet, in dem er dem positiven Teil hinzugefügt wird. Sind die wahren Werte normalverteilt, kann es die so entstandene Wertemenge nicht sein. Deren Verteilung wird als gefaltete oder Betragsverteilung bezeichnet.

Mit dieser speziellen Verteilung haben sich Leone et. al. in [37], Elandt in [13] und Johnson in [23] und [24] ausführlich beschäftigt. Geiger weist in [18] auf die Vorteile der doppelten Werteanzahl der Betragsverteilung hin.

Bei diesen Untersuchungen ergibt sich der Faltungspunkt per Definition zu Null, da die Zielgröße der perfekte Binder ist. Die zugehörige Dichtefunktion

$$f(x) = \frac{1}{\sigma}\sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \quad \text{für} \quad x \geq 0 \tag{5.9}$$

wird bei Cohen und Whitten in [8] als eindimensionale Rayleigh-Verteilung bezeichnet. Auftretende systematische Abweichungen können nach Dietrich und Schulze [10] durch einen Verschiebefaktor a berücksichtigt werden, siehe Bild 5.6.

Durch diesen Verschiebefaktor a können systematisch bedingte Abweichungen von der perfekten Lage bzw. Geometrie der Binder, die z.B. in der Montageart dieser Konstruktionen begründet sein können, berücksichtigt werden.

Bisher wurden bei Untersuchungen von Abweichungen im Bereich des Bauingenieurwesens, zu denen die Imperfektionen gehören, z.B. Strauch [56], Fleischer [16], Paschen und Sack [44], Lindner und Gietzelt [38],[39] und Ehlbeck und Blass [11], die teilweise vorzeichenbehafteten Messwerte durch Normalverteilungen approximiert.

5.2.3 Empfehlungen für geometrische Imperfektionen

Globale Imperfektion

Für die Winkel der globalen Imperfektion der Stichprobe werden in Anlehnung an die Vorverdrehungen in der Norm EDIN 1052 für alle Binder mit einer Höhe $h < 3m$ vorgeschlagen den 95% Fraktilwert der gefalteten Normalverteilung und für alle anderen Binder mit $h \geq 3m$ den höhenabhängigen Winkel zu verwenden:

$$\varphi_0 = \begin{cases} \dfrac{1}{46} & \text{für} \quad h < 3m \\ \dfrac{1}{46}\sqrt{\dfrac{3}{h}} & \text{für} \quad h \geq 3m. \end{cases} \tag{5.10}$$

Lokale Imperfektion

Auf der Grundlage der 95% Fraktilwerte der Vorkrümmungsamplituden werden als lokale Imperfektionen

$$e_{O,1} = \frac{L}{400} \text{ und } e_{O,2} = \frac{L}{800} \tag{5.11}$$

vorgeschlagen. Diese Imperfektionen sind jede für sich und in ungünstiger Kombination zu untersuchen.

Anmerkung

Da der Praxis bislang Angaben zur Schiefstellung von Dreieckbindern fehlen, wird ihre Größe aus den Angaben zur Vorkrümmung von Bauteilen abgeleitet. Der aus dieser Vorgehensweise resultierende Winkel der Schiefstellung erreicht aber nicht die erforderliche statistische Sicherheit von 95%.

5.3 Zum gleichzeitigen Auftreten von Lasten und Imperfektionen

In DIN 1055-100 werden charakteristische Werte geometrischer Größen definiert. Im Falle von Imperfektionen werden diese durch ihren Bemessungswert dargestellt. Zur Ermittlung der Bemessungswerte geometrischer Größen werden die Imperfektionen, die in der Norm DIN 1055-100 mit Δa bezeichnet werden, zu den Nennwerten a_{nom} addiert:

$$a_d = a_{nom} \pm \Delta a. \tag{5.12}$$

Die Größen dieser Abweichungen Δa sind in den materialspezifischen Bemessungsnormen angegeben oder werden durch Messung und anschließende statistische Auswertung ermittelt. Mit den Bemessungswerten der geometrischen Größen und der Einwirkungen können nun die Beanspruchungen bestimmt werden. Bei linear-elastischer Tragwerksanalyse gilt das Superpositionsprinzip. Für die nichtlineare Tragwerksanalyse, d.h. die Einwirkung ist nicht proportional zur Auswirkung, gilt dieses Prinzip streng genommen nicht mehr. Es sind dann in Abhängigkeit von der Art der Änderung der Einwirkung gegenüber der Auswirkung die Teilsicherheitsbeiwerte auf die Einwirkung oder die Auswirkung zu beziehen.

Üblicherweise sind die Beanspruchungen E_d von den Lasten F_d, der Geometrie a_d und den Baustoffeigenschaften X_d in der Form

$$E_d = E(F_d, a_d, X_d) \tag{5.13}$$

mit a_d nach 5.12 abhängig, d.h. bei geometrisch nichtlinearer Berechnung wächst die Auswirkung stärker als die Einwirkung. Setzt sich a_d aus dem die perfekte Geometrie

beschreibenden Anteil a_{nom} und den in Abschnitt 5.1 definierten Imperfektionen Δa zusammen, kann E_d wie folgt geschrieben werden

$$E_d = E(F_d, F_d \circ I_d, a_{nom}, X_d) \tag{5.14}$$

oder in der Darstellung der Auswirkungen, wenn das Superpositionsprinzip gilt,

$$E_d = E_{Fd}(a_{nom}, X_d) + E_{F_d \circ I_d}(a_{nom}, X_d) \tag{5.15}$$

wobei $F_d \circ I_d$ den durch die Imperfektionen verursachten Anteil der Beanspruchungen beschreibt. Damit können für die Einwirkungskombinationen

$$K_d = \gamma_G F_k \oplus \gamma_G (F_k \circ I_k) \tag{5.16}$$

und

$$K_d = \gamma_G F_k \oplus \gamma_G (F \circ I)_k \tag{5.17}$$

angeben werden. In Gleichung 5.16 sind immer die ungünstigen Fraktilwerte für F_k und I_k einzusetzen. Die aus Gleichung 5.17 resultierende Abminderung der durch die Imperfektionen verursachten Beanspruchungen, wegen der geringeren Wahrscheinlichkeit des gleichzeitigen Auftretens der ungünstigen Fraktilwerte der beteiligten Einwirkungen, ist nach heutigem Kenntnisstand nicht zu begründen, da es keine Untersuchungen gibt, bei denen Lasten und Imperfektionen für bestimmte Bauteile durch Messung ermittelt und anschließend durch eine gemeinsame statistische Verteilung approximiert wurden.

Die einzigen zur Zeit durchführbaren Untersuchungen zur Berücksichtigung der Wahrscheinlichkeit des gleichzeitigen Auftretens von Imperfektionen und anderen Einwirkungen sind EDV basierte Simulationen in denen als Eingangsgrößen Verteilungsfunktionen verwendet werden. In diesem Zusammenhang wird erwähnt, dass die Zufälligkeit der Verteilung der Einwirkungen stark von der menschlichen Einflussnahme abhängig ist.

Kapitel 6

Ersatzlastgruppen

Im Kapitel 5 werden mögliche Arten von Imperfektionen beschrieben und die geometrischen Imperfektionen ausführlich behandelt. Die Wahl der maßgebenden Imperfektionen und ihre Berücksichtigung in der Systemgeometrie ist mit großem Aufwand verbunden. Die zur Zeit verfügbaren Rechenhilfsmittel erlauben zwar geometrisch nichtlineare Berechnungen geometrisch imperfekter Systeme, jedoch sind diese Berechnungen aus Kostengründen noch nicht für jedes einzelne Bauvorhaben möglich. Es besteht die Notwendigkeit, den Einfluss der Imperfektionen auf die Beanspruchungen der einzelnen Stäbe und ihrer Verbindungen durch Ersatzlastgruppen abzuschätzen, die dann am perfekten Sekundärsystem wirken. Die Abschnitte 6.1 und 6.2 zeigen zwei mögliche Anwendungen.

6.1 Ersatzlastgruppen für Imperfektionen I

Ausgehend von der Definition der geometrischen Imperfektionen in Abschnitt 5.1 werden die zwei praktisch ausreichenden Ersatzlastgruppen angegeben. Diese Ersatzlastgruppen ersetzen die geometrischen Ersatzimperfektionen, wie dies z.B. in der Norm DIN 18800 Teil 2 der Fall ist. Bild 6.1 zeigt die Ersatzlastgruppen für die globalen und die lokalen Imperfektionen. Diese Ersatzlastgruppen werden als Einwirkung auf das System in der Referenzkonfiguration Gleichung 1.3 aufgebracht und ersetzen damit den Übergang in die geometrisch imperfekte Konfiguration, der durch die Abbildung ϕ_{t_I,t_0} in Gleichung 1.9 gegeben ist. Eine nichtlineare Berechnung im Sinne einer Theorie II. Ordnung nach Abschnitt 3.2 ist aber nach wie vor erforderlich.

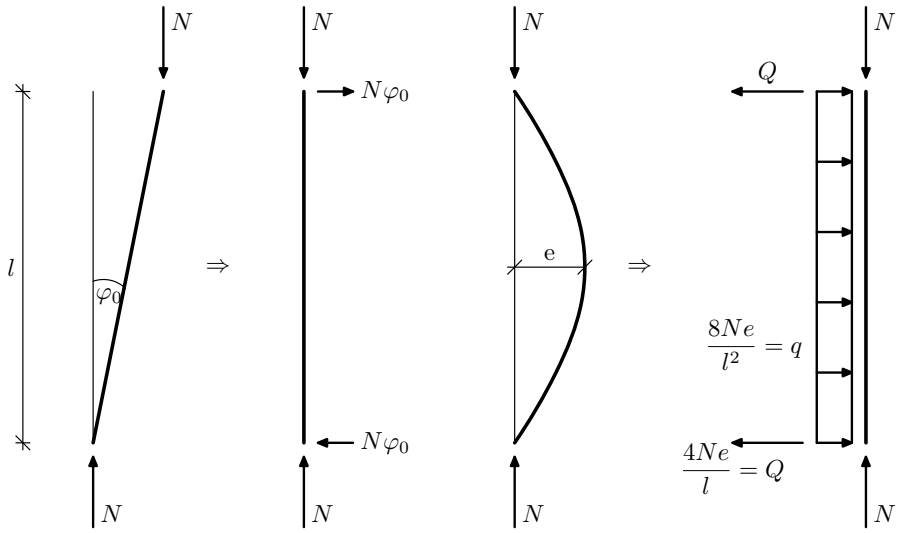


Bild 6.1: Ersatzlastgruppen für Imperfektionen I

6.2 Ersatzlastgruppen für Imperfektionen II

Als zweite Möglichkeit wird der Begriff Ersatzlastgruppe im Zusammenhang mit den in der Literatur häufig verwendeten Begriffen Stabilisierungskräfte, Aussteifungslasten oder Seitenlasten verwendet. Der Begriff Seitenlasten enthält zumeist aber auch horizontale Windbeanspruchungen. Diese Ersatzlastgruppen werden in der Regel als Ersatzbelastung der seitlichen Lagerung eines beidseitig gelenkig gelagerten imperfekten Druckstabes betrachtet. Im Unterschied zu Abschnitt 6.1 ist die Größe dieser Ersatzlastgruppen derart, dass es genügt eine lineare Berechnung am perfekten Druckstab durchzuführen. Voraussetzung dafür ist, dass die Verformungen im Sinne von Kapitel 3 klein sind. Bild 6.2 zeigt verschiedene Möglichkeiten seitlicher Lagerungen, für die analytische (Bild 6.2 a bis c) bzw. numerische (Bild 6.2 d) Lösungen in der Literatur vorliegen.

In der Literatur finden sich, ausgehend von Engesser [14], zahlreiche Arbeiten zu diesem Thema, die verschiedene seitliche Lagerungen und Schnittkraftverteilungen untersuchen.

Ersatzlasten für den elastisch gebetteten Druckstab mit einer Imperfektion nach Gleichung 6.1 sind in Bild 6.3 für eine über die Stablänge konstant bzw. sinusförmig verteilte Normalkraft dargestellt. Analytische Lösungen geben unter anderem Natterer und Kessel in [43] und Petersen in [45] an.

$$i_{e,O}(x) = e_O \sin \pi \frac{x}{L_O} \tag{6.1}$$

Möhler und Schelling geben in [42] für den elastisch gebetteten und durch

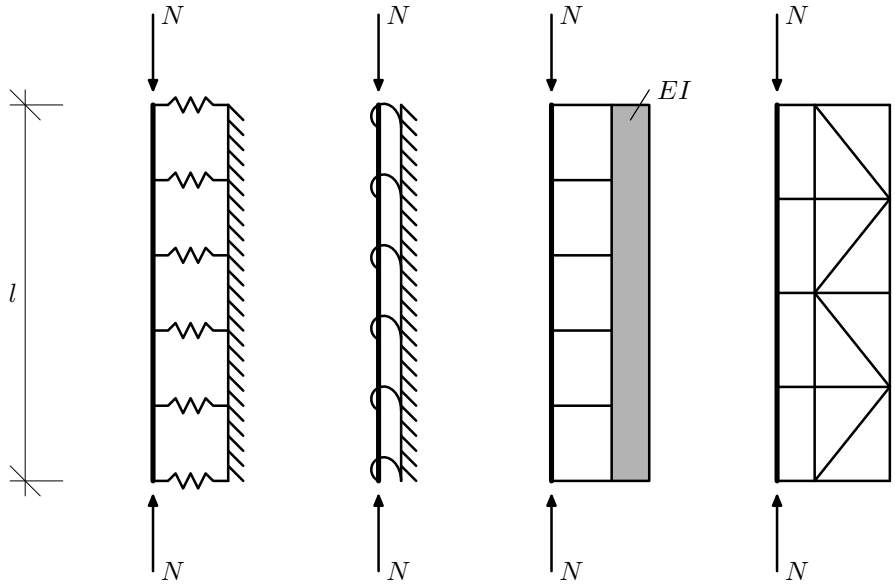


Bild 6.2: Seitlich gehaltene Druckstäbe
(v.l.n.r. a) elastische Bettung, b) elastische Drehbettung, c) Abstützung auf Biegestab und d) Abstützung auf Fachwerkbinder)

konstante Normalkräfte beanspruchten Druckstab mit der Imperfektion

$$i_{e,O}(x) = 4(e_O + v)\left[\frac{x}{L_O} - \left(\frac{x}{L_O}\right)^2\right] - \frac{16}{5}v\left[\frac{x}{L_O} - 2\left(\frac{x}{L_O}\right)^3 + \left(\frac{x}{L_O}\right)^4\right] \tag{6.2}$$

als mathematische Lösung der Differentialgleichung die konstante Ersatzlast q_e an. Mechanisch lässt sich diese Ersatzlast jedoch nicht begründen, da die zur Biegelinie gehörige Verteilung der Bettungssteifigkeit in den Randbereichen nicht definiert ist. Diese Ersatzlast wird, auch wegen der leichten Handhabbarkeit, in der Norm EDIN 1052 zur Bemessung von Verbänden, die zur seitlichen Halterung von Druckstäben dienen, verwendet. In der Norm EDIN 1052 besitzt diese Ersatzlast nur für eine Imperfektionsamplitude $e_O = L/400$ und eine ausgezeichnete Verformung $v = L/600$ Gültigkeit.

Nach Kapitel 5 treten aber auch lokale Imperfektionen der Form

$$i_{e,O}(x) = \sum_{j=1}^{2} e_{O,j} \sin j\pi \frac{x}{L_O} \tag{6.3}$$

auf, so dass die Angabe von Ersatzlastgruppen auch für diese Fälle erforderlich ist. Bild 6.4 zeigt die Ersatzlastgruppen für die Imperfektionen nach Gleichung 6.3 die einer Erweiterung der Gleichungen von Natterer und Kessel in [43] entsprechen.

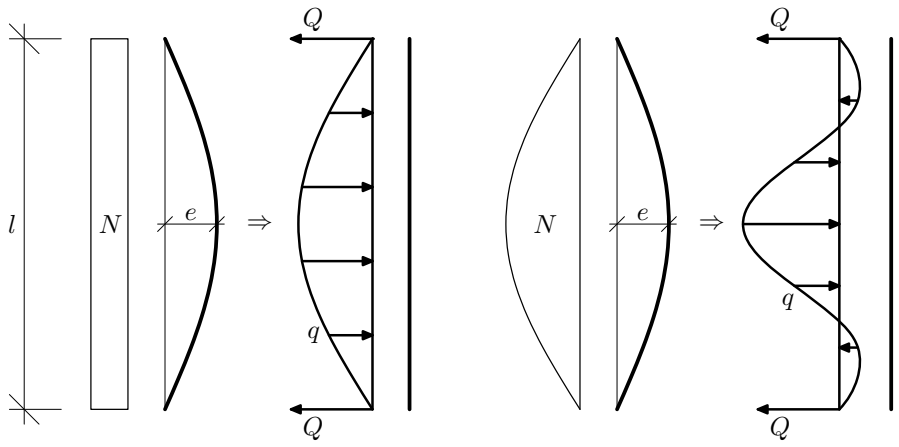


Bild 6.3: Ersatzlastgruppen für Imperfektionen II

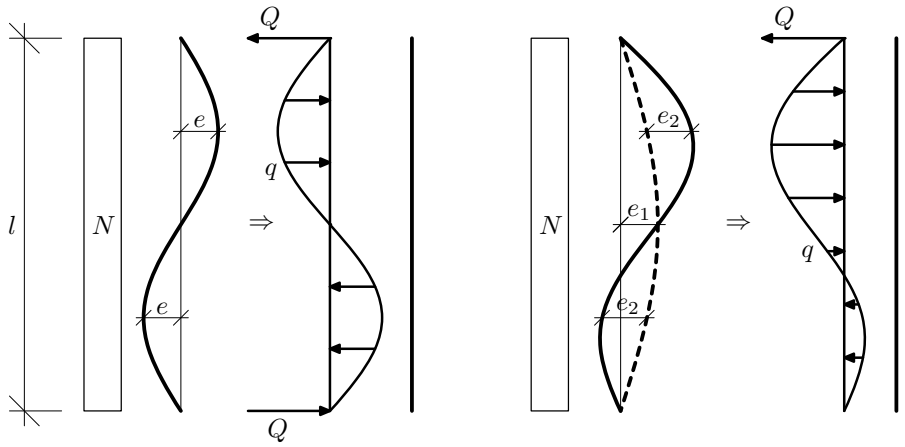


Bild 6.4: Weitere Ersatzlastgruppen für Imperfektionen II

Wie die Auswertung der Untersuchungen in Abschnitt 5.2 gezeigt hat, sind auch globale Imperfektionen vorhanden, für die Ersatzlastgruppen angegeben werden müssen. Diese Aufgabe gestaltet sich jedoch wesentlich schwieriger, da, wie in Bild 6.1 zu sehen ist, zwar das Kräftegleichgewicht erfüllt wird jedoch nicht das Momentengleichgewicht. Die Größe dieser Ersatzlastgruppen ist daher sehr stark von der Steifigkeit der sich anschließenden Konstruktion abhängig.

Die Bilder 6.5 und 6.6 zeigen die Ersatzlastgruppen, die aus den lokalen (a) bzw. globalen (b) Imperfektionen resultieren, an einem räumlichen Stabwerk. Deutlich erkennbar ist, dass die Ersatzlastgruppe IIa, siehe Bild 6.5, in einer Ebene ins Gleichgewicht gebracht werden kann, während die Ersatzlastgruppe IIb, die in Bild 6.6 nur am halben System dargestellt ist, das räumliche Stabwerk beansprucht.

Im folgenden werden nur noch Ersatzlastgruppen für Imperfektionen II verwendet.

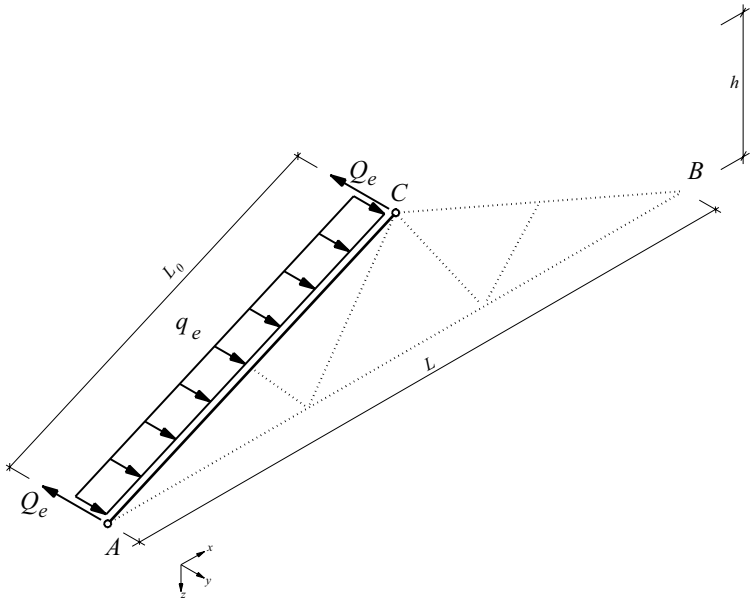


Bild 6.5: Lage der Ersatzlastgruppe IIa am räumlichen Stabwerk

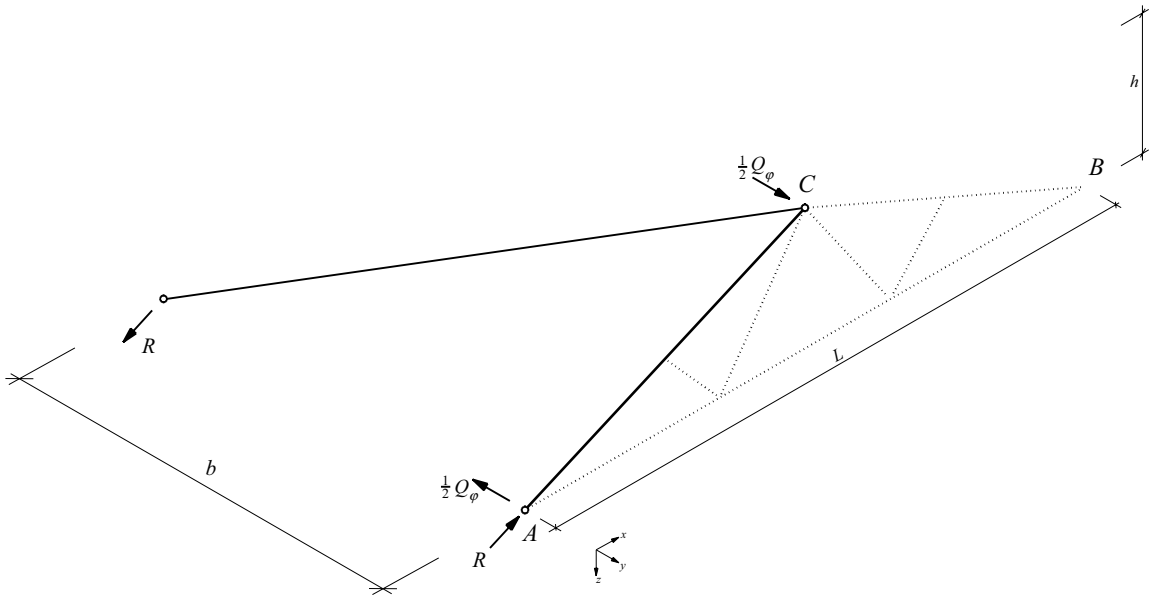


Bild 6.6: Lage der Ersatzlastgruppe IIb am räumlichen Stabwerk

Kapitel 7

Anwendung auf Satteldachbinder

7.1 Allgemeines

Gegenstand der Untersuchungen ist die in Kapitel 5 Bild 5.1 dargestellte Dachkonstruktion. Diese besteht aus 10 Satteldachbindern mit einer Füllstabanordnung in W-Form. Im folgenden sind diese Binder, die die primären Einwirkungen abtragen, die Primärsysteme. Zur räumlichen Lastabtragung ist zusätzlich ein Sekundärsystem erforderlich, dass alle Kräfte, die senkrecht zur Ebene der Primärsysteme auftreten, aufnehmen kann. Dieses Sekundärsystem besteht aus den Pfetten, den parallelgurtigen Verbänden in den Ebenen der Binderobergurte und den diagonal angeordneten Windrispen.

Das räumliche Gesamtsystem besteht also aus verschiedenen Teilsystemen mit unterschiedlichen Eigenschaften hinsichtlich Tragfähigkeit und Steifigkeit. Zur Ermittlung von Ersatzlastgruppen, die im günstigen Fall an ebenen Systemen angesetzt werden, ist es erforderlich, das Tragverhalten des Gesamtsystems zu untersuchen. Kessel hat in [30] unter Ausnutzung der Symmetrie geometrisch nichtlineare Berechnungen an verschiedenen Gesamtsystemen durchgeführt und eine Ersatzlastgruppe für die Bemessung der Obergurtverbände in Abhängigkeit von der Biegesteifigkeit sowohl der Verbände als auch der Primärsysteme angegeben. Als Imperfektion verwendet er eine Vorkrümmung der Obergurte der Satteldachbinder von Traufe zu Traufe. Diese Imperfektion entspricht der Kombination aus globaler und gleichorientierter symmetrischer lokaler Imperfektion gemäß Kapitel 5.

Da es sehr schwierig ist, aus diesen 3-dimensionalen Stabwerken das Tragverhalten und den Einfluss der Steifigkeiten der Einzelsysteme herauszuziehen, wird das Gesamtsystem in verschiedenen Stufen extrahiert, untersucht und anschließend wieder zum Gesamtsystem zusammengefügt.

7.1.1 Kennwerte der Festigkeiten und Steifigkeiten

Allen Berechnungen liegen die in Tabelle 7.1 angegebenen charakteristischen Festigkeits-, Steifigkeits- und Rohdichtewerte zugrunde. Die Stäbe der fachwerkartigen Primär- und Sekundärsysteme bestehen aus Nadelholz der Festigkeitsklasse $C24$ nach Norm DIN EN 338 die durch Nagelplatten verbunden sind. Die Windrispen sind aus $S235$ bzw. $S355$ nach Norm DIN EN 10025. Die Verbindung der einzelnen Bauteile untereinander erfolgt durch Nägel mit einem Durchmesser von $d = 4mm$.

Tabelle 7.1: Festigkeits-, Steifigkeits- und Rohdichtewerte

Material	Festigkeitswerte $\left[\frac{N}{mm^2}\right]$				Steifigkeitswerte $\left[\frac{N}{mm^2}\right]$			Dichte $\left[\frac{kg}{m^3}\right]$
	$f_{m,k}$	$f_{t,0,k}$	$f_{c,0,k}$	$f_{v,k}$	$E_{0,mean}$	$E_{90,mean}$	G_{mean}	ρ_k
$C24$	24	14	21	2,5	11000	370	690	380
	$f_{y,k}$	$f_{u,k}$			E_{mean}		G_{mean}	ρ
$S235$	235	360			210000		81000	7850
$S355$	355	510			210000		81000	7850

Der Verschiebungsmodul je Scherfuge der vorgebohrten Nägel kann nach Norm EDIN 1052 berechnet werden:

$$K_{ser} = \frac{\rho_k^{1,5}}{20} \cdot d^{0,8}. \tag{7.1}$$

7.2 Modellierung

7.2.1 System 1: Sparrendach mit Abspannung

Das erste extrahierte System ist in Bild 7.1 dargestellt. Dieses System besteht aus zwei geraden zur $x-y$ Ebene geneigten Stäben, den Sparren, die durch einen geraden Stab, den Untergurt, verbunden sind. Im Punkt mit dem größten Abstand zur $x-y$ Ebene, dem First, sind sie durch je eine Diagonale je Dachhälfte gestützt. Die Sparren besitzen ausreichende Biegesteifigkeit, sodass ein Versagen senkrecht zur Stabachse ausgeschlossen werden kann. Im First greift eine vertikale Einzellast an. An diesem System wird der Einfluss der Steifigkeiten auf die kritische Last und auf das Tragverhalten untersucht.

7.2.2 System 2: Dreieckbinder mit Verband

Im zweiten System, siehe Bild 7.2, werden zwei Satteldachbinder und die dazwischen liegenden Verbände unter Beachtung der Idealisierungen 1 bis 5 vollständig diskretisiert. Die in der Praxis übliche schubsteife Verbindung der Binderobergurte wird

durch Federelemente realisiert. Dieses Modell ist Ausgangspunkt für die Ermittlung der Abhängigkeit der kritischen Lasten von den Imperfektionen und der Einordnung der in Kapitel 5 angegebenen Bemessungsvorschläge. Das System wird durch gleiche Einzellasten im First und in Obergurtmitte der Satteldachbinder beansprucht.

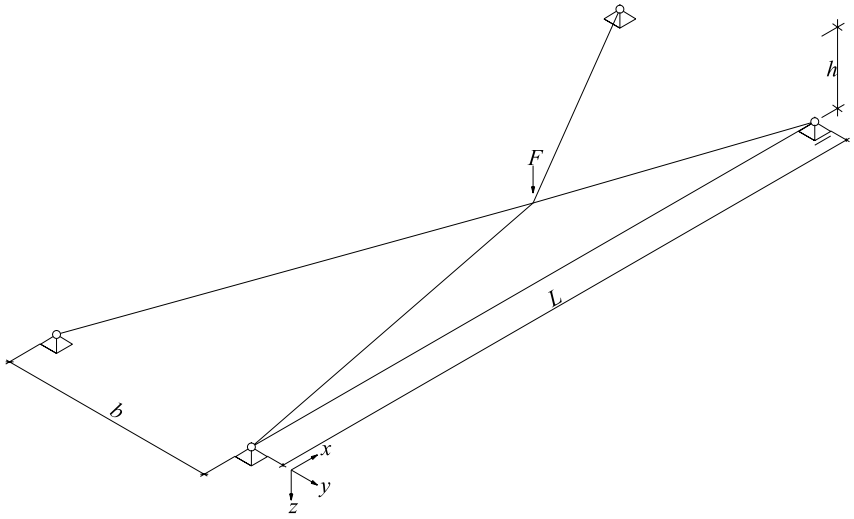


Bild 7.1: System 1

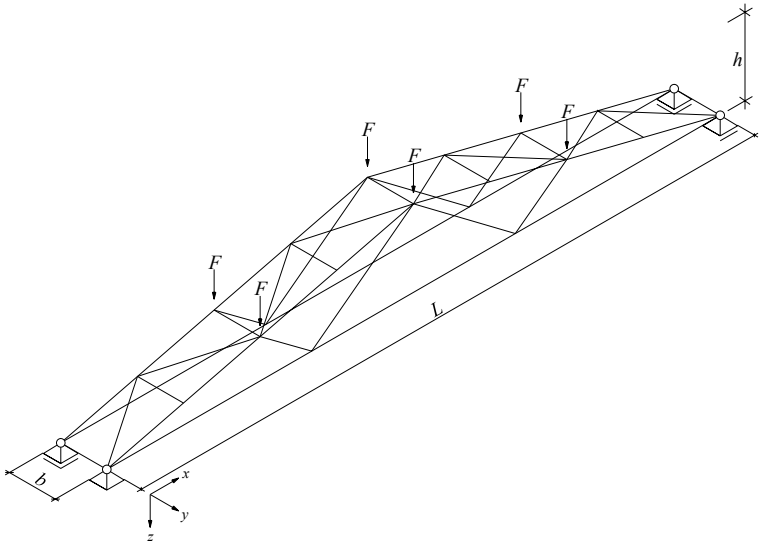


Bild 7.2: System 2

7.2.3 System 3: Gesamtsystem

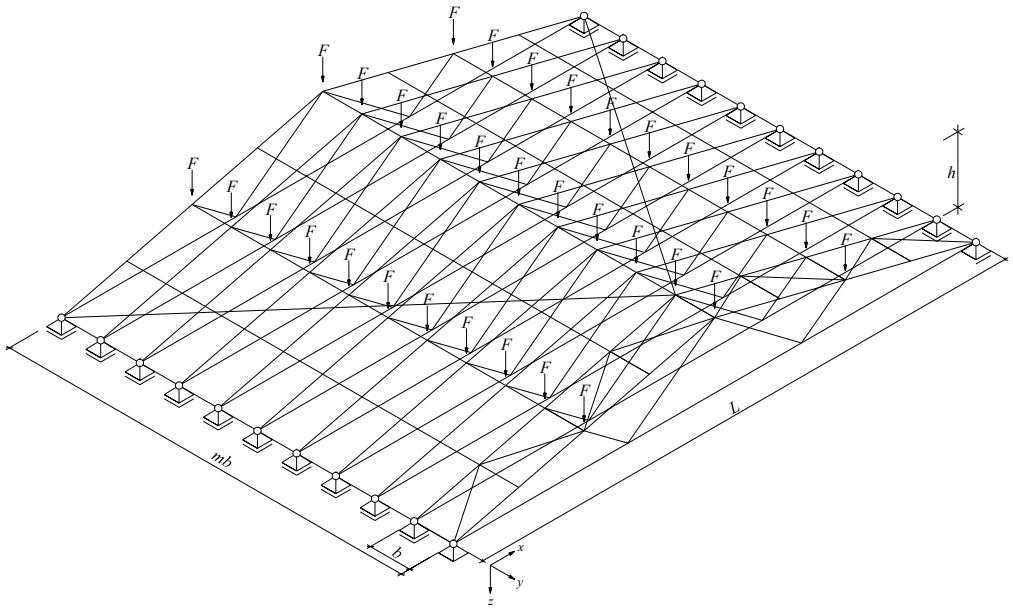


Bild 7.3: System 3

System 3 besteht aus 11 Satteldachbindern als Primärsystemen die durch parallelgurtige Verbände und Diagonalen zu einem Sekundärsystem ergänzt werden.

Am Gesamtsystem in Bild 7.3 werden die Beanspruchungen infolge Gebrauchslasten ermittelt. Bei System 3 werden die Lasten analog zu System 2 idealisiert, d.h. Einzellasten in den Firstpunkten und in der Mitte der Obergurte. Unter Berücksichtigung der Ergebnisse der Systeme 1 und 2 können dann Ersatzlastgruppen für eine einfache lineare Berechnung angegeben werden.

7.3 Eigenwertanalyse

7.3.1 System 1

Für dieses System ist keine Eigenwertanalyse erforderlich, da die Sparren als nicht knickgefährdet angesehen werden. Das Versagen des Systems beschränkt sich daher auf zwei Möglichkeiten, das Durchschlagen und das Kippen des Sparrenpaares, die in Abschnitt 7.4.1 behandelt werden. Tabelle 7.2 enthält die Geometriedaten und Tabelle 7.3 beinhaltet die Steifigkeiten des Ausgangssystems.

Tabelle 7.2: Geometriedaten System 1

Länge $L[m]$	Breite $b[m]$	Höhe $h[m]$	Imperfektion $\varphi_0[-]$
10	$m \cdot 0,75$	$1,25$	0

Tabelle 7.3: Steifigkeiten System 1

	OG	UG	Diagonale
$EA\ [MN]$	240	160	$25,2$

7.3.2 System 2

Tabelle 7.4 enthält die geometrischen Daten des untersuchten Systems. Die Verbindung der Binderobergurte (OG) mit den Verbandsgurten (VG), die nach Idealisierung 4 die gleichen Systemlinien haben, erfolgt wie in der Praxis üblich durch Nägel. Diese werden mit Hilfe von Federelementen simuliert, je Verbandsfeld 3 Nägel mit einem Durchmesser von $d = 4mm$. Die gleiche Anzahl Verbindungsmittel wird als Auflagersteifigkeit der Binder angesetzt.

Tabelle 7.4: Geometriedaten System 2

Länge $L[m]$	Breite $b[m]$	Höhe $h[m]$	Imperfektion $\varphi_0[-]$	$e_O[m]$
10	$0,75$	$1,25$	0	0

Die Steifigkeit wird nach Gleichung 7.1 ermittelt. Die Reibung der Gurte untereinander wird insofern berücksichtigt, dass auf eine Abminderung des Verschiebungsmoduls, wie in der Norm EDIN 1052 für den Grenzzustand der Tragfähigkeit gefordert, verzichtet wird.

In Bild 7.4 sind die zu den ersten vier Eigenwerten gehörenden Eigenformen dargestellt. Die Bilder zeigen die Draufsicht auf das Stabwerk in Bild 7.2.

In Tabelle 7.5 sind die Steifigkeiten der einzelnen Stäbe bezüglich des Elementkoordinatensystems, siehe Bild 4.2, angegeben. Die Nachgiebigkeit in den Verbindungen wird durch eine Verringerung der Dehnsteifigkeiten der Füllstäbe simuliert. Für die Binderfüllstäbe (BF) wird die Steifigkeit auf 20% und für die Verbandsfüllstäbe (VF) auf 10% reduziert. Diese Steifigkeiten stellen untere Fraktilwerte dar.

Zur Verifizierung der Ergebnisse wird das System 2 weiter vereinfacht, indem für alle Stäbe Fachwerkstäbe verwendet werden und die Obergurte der Satteldachbinder

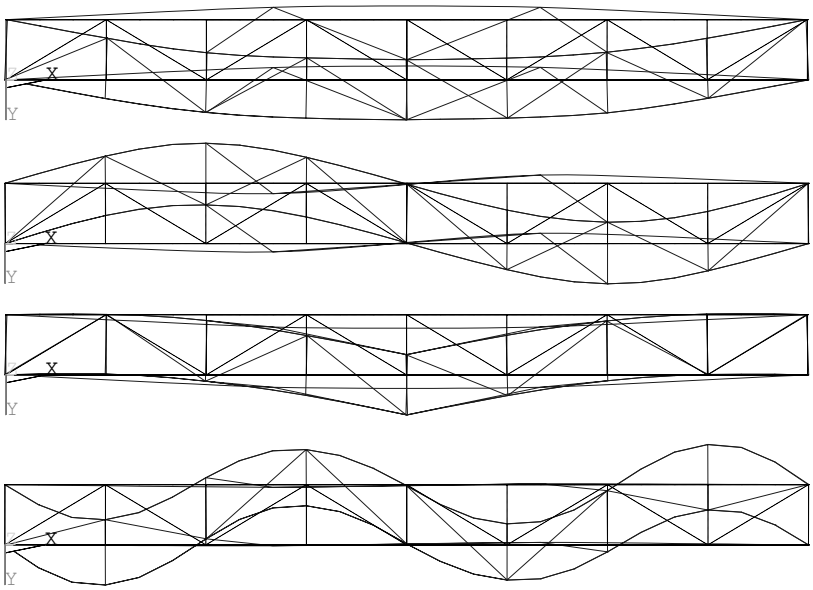


Bild 7.4: Eigenformen zu den Eigenwerten λ_i

i	1	2	3	4
$\lambda_i F[kN]$	36	67	75	89

Tabelle 7.5: Steifigkeiten System 2

	OG	UG	BF	VG	VF
$EA\ [MN]$	132	132	66	66	57,6
$EI_y\ [MNm^2]$	0,0396	0,0396		0,055	
$EI_z\ [MNm^2]$	0,44	0,44		0,0198	

gleichzeitig auch die Obergurte der Verbandsbinder sind. Es entfallen die in Tabelle 7.5 angegebenen Biegesteifgkeiten und die Dehnsteifigkeit der Verbandsgurte EA_{VG}, die zur Dehnsteifigkeit der Obergurte der Satteldachbinder EA_{OG} addiert wird. Das System erhält parametrisierte Imperfektionen nach Kapitel 5. Gemäß den Festlegungen für kleine Drehungen in Abschnitt 3.1 werden die Gleichgewichtsbedingungen in der Momentankonfiguration aufgestellt. Dann kann die kritische Last mit Hilfe des Arbeitssatzes bestimmt werden:

$$F_{crit} = \frac{2}{3}\frac{b^2 h}{n}\frac{EA_{OG}}{L_O^3}\frac{1}{\delta r} \tag{7.2}$$

mit

n Anzahl der Binder, hier 2

δr Geometriefaktor

$$\delta r = r_O + \left(\frac{1}{2} + \frac{e_O}{\varphi_0 h}\right) r_M \tag{7.3}$$

$$r_O = \frac{11}{24} + \frac{1}{12}\frac{EA_{OG}}{EA_{UG}}\left(\frac{L}{L_O}\right)^3 + \frac{EA_{OG}}{EA_{VF}}\left[\frac{2}{3}\left(\frac{L_{VF}}{L_O}\right)^3 - \frac{7}{12}b^2\left(\frac{1}{L_O}\right)^3\right] \tag{7.4}$$

$$r_M = -\frac{1}{12} + \frac{1}{6}\frac{EA_{OG}}{EA_{UG}}\left(\frac{L}{L_O}\right)^3 + \frac{EA_{OG}}{EA_{VF}}\left[\frac{4}{3}\left(\frac{L_{VF}}{L_O}\right)^3 + \frac{5}{6}b^2\left(\frac{1}{L_O}\right)^3\right]. \tag{7.5}$$

Der Faktor δr enthält die Größen zur Festlegung der Imperfektionsform. Eine korrekte Lösung kann damit nur erzielt werden, wenn die erste Eigenform bekannt und daraus resultierend die Imperfektion affin zu dieser Eigenform gewählt ist.

Der Vergleich der kritischen Lasten, die zum einen nach Bild 7.4 für λ_1 eine kritische Last $F_{crit} = 36kN$ liefert und zum anderen nach Gleichung 7.2 für eine Imperfektion affin zur ersten Eigenform mit $e_O = 1,84mm$ und $\varphi_0 h = 12,5mm$ eine kritische Last $F_{crit} = 34kN$ ergibt, zeigt eine gute Übereinstimmung der Ergebnisse. Der Unterschied, der im wesentlichen auf die Vernachlässigung der Biegesteifigkeit der Stäbe zurückzuführen ist, beträgt etwa 6%.

7.3.3 System 3

Geometrie und Steifigkeiten der Satteldach- und Verbandsbinder werden analog zu System 2 gewählt, vgl. Tabellen 7.4 und 7.5. Für die Windrispe, wird ein Flachstahlband mit einer variablen Dehnsteifigkeit von $EA_D = c \cdot 25,2MN$ nach Tabelle 7.3 verwendet.

In Bild 7.5 ist die zum ersten Eigenwert gehörende Eigenform dargestellt. Die Eigenformen für das System 3 ohne Windrispe entsprechen denen des Systems 2 in Bild 7.4.

Vergleich der Systeme 2 und 3

Der Übergang von System 2 zu System 3 ist durch die Eigenwertanalyse ohne Windrispe gegeben. Die Umrechnung der kritischen Lasten der ersten Eigenform auf ein Gesamtlastniveau zeigt deutlich die mögliche Reduktion des Gesamttragwerks ohne Windrispe auf System 2. Die Eigenwerte sind in den Bildern 7.4 und 7.5 angegeben, werden aber bezüglich der Gesamtlast noch einmal zusammengestellt:

System 2: $\lambda_1 F_{gesamt} = 2 \cdot 3 \cdot 36kN = 216kN$

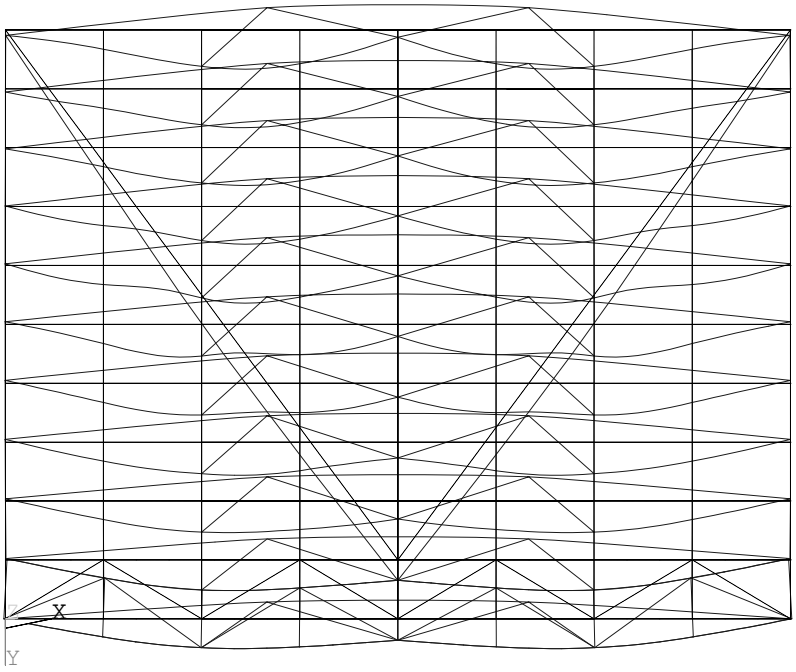


Bild 7.5: Eigenform zum Eigenwert λ_1

Die kritischen Lasten für verschiedene Steifigkeiten EA_D ergeben sich zu:

c	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
$\lambda_1 F[kN]$	6,1	21,4	25,6	27,3	28,2	28,8

System 3: $\lambda_1 F_{gesamt} = 11 \cdot 3 \cdot 6,1kN = 201kN$.

Die Abweichung von 7,5% folgt im wesentlichen aus der federelastischen Lagerung der Binderauflager in y-Richtung. Wird die Lagerung als unverschieblich angenommen, ergibt sich eine Abweichung von 2,4%. Die Ergebnisse der Eigenwertanalyse von System 2 für λ_2 bis λ_4 können auch auf System 3 ohne Windrispe übertragen werden.

7.4 Geometrisch nichtlineare Berechnung

7.4.1 System 1

Für das System 1 wird als Imperfektion eine Anfangsverdrehung $\varphi_0 = \frac{1}{46}$ in der Art vorgegeben, dass die Diagonalen ausschließlich auf Zug beansprucht werden, so wie dies in Kapitel 5 definiert ist. In der Praxis handelt es sich bei den Diagonalen meist um druckschlaffe Flachstahlbänder. Wie schon in Abschnitt 7.3.1 erwähnt, treten bei diesem System zwei Versagensformen auf, die als Grenzwerte aufgefasst werden können.

Fall 1: Für $EA_D \to \infty$ folgt das Durchschlagproblem.

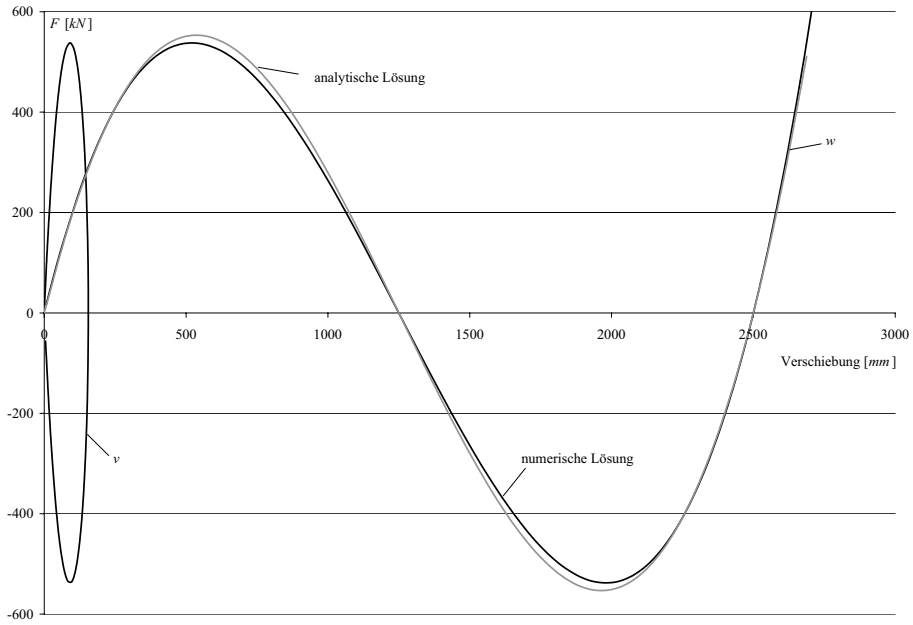


Bild 7.6: Last-Verschiebungsbeziehungen für $EA_D \to \infty$

In Bild 7.6 ist zusätzlich zur numerischen Lösung die analytische Lösung, siehe z.B. PETERSEN in [45], für das ebene Durchschlagproblem eingetragen. Es ist zu erkennen, dass die Durchschlaglast des räumlichen Systems geringer ist. Diese Abweichung ist in der besonderen Geometrie des räumlichen Systems begründet. Eine Verschiebung w des Firstpunktes hat wegen der Verträglichkeit mit der dehnstarren Diagonale immer eine Verschiebung v zur Folge. Mit der vorgegebenen Imperfektion $\varphi_0 = \frac{1}{46}$ führt diese Verschiebung v auf eine größere Kraft in der Ebene der Sparren.

Fall 2: Für $EA_{OG}, EA_{UG} \to \infty$ folgt das Kippproblem.

Bild 7.7 zeigt die Last-Verschiebungsbeziehungen für das Kippproblem. Analog zu Fall 1 ist hier die analytische Lösung des federgelagerten Druckstabes, vgl. Abschnitt 3.4, angegeben. Für die Steifigkeit der Translationsfeder ist dabei die umgerechnete Steifigkeit der großen Diagonale $K = 2EA_D \frac{b^2}{l_D^3}$ zu verwenden. Die Abweichungen im Anfangsbereich resultieren aus der Imperfektion, in den übrigen Bereichen aus den bei der Simulation verwendeten Steifigkeiten, die aus numerischen Gründen nicht über alle Grenzen gesteigert werden können.

Die Ergebnisse der Berechnungen von System 1 für unterschiedliche Untergurtsteifigkeiten und variable Breiten b sind in Bild 7.8 dargestellt. Wie zu erwarten, sind die kritischen Lasten von der Breite b abhängig. Mit zunehmender Breite steigen auch die kritischen Lasten. Interessant ist weiterhin der schon von KESSEL in [30]

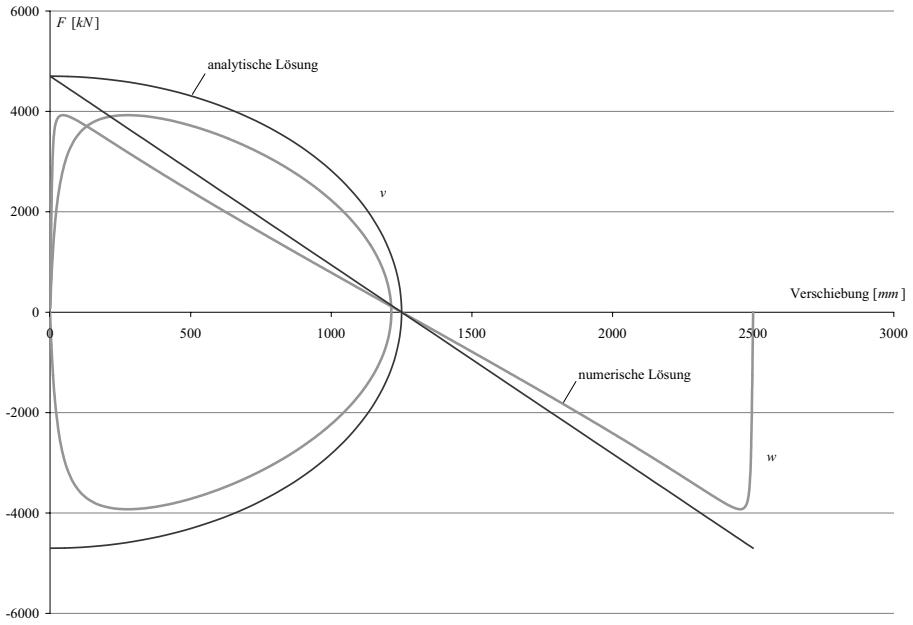


Bild 7.7: Last-Verschiebungsbeziehungen für $EA_{OG}, EA_{UG} \to \infty$

angegebene Einfluss der Steifigkeit des Primärsystems auf die kritischen Lasten. Die Änderung der Steifigkeit des Primärsystems, ausgedrückt durch die Dehnsteifigkeit des Untergurtes, führt zu einer nichtlinearen Änderung der kritischen Last.

Eine weitere Möglichkeit zur Variation der Steifigkeit des Primärsystems besteht in der Änderung der Höhe h. Bild 7.9 zeigt die Entwicklung der kritischen Last in Abhängigkeit von der Höhe h für verschiedene Breiten b.

Nun wird das Sekundärsystem von System 1 um zwei weitere Diagonalen erweitert, siehe Bild 7.10. Damit soll der Einfluss kombinierter Sekundärsysteme auf das Tragverhalten untersucht werden, wobei insbesondere die Steifigkeiten der großen Diagonalen von Interesse sind. Die Auswertungen in Bild 7.8 für Untergurtsteifigkeiten $EA_{UG} = 100MN$ bis $EA_{UG} = 300MN$ und in Bild 7.9 zeigen deutlich, dass bei kleiner werdenden Breiten b durch Erhöhung der Durchschlaglast die kritische Last des Systems nicht weiter gesteigert werden kann. Der Einfluss der Kipplast wird vorrangig. Voraussetzung dafür ist, dass die auftretenden Kräfte von den verwendeten Diagonalen aufgenommen werden können. In der Praxis werden üblicherweise kleine Flachstahlquerschnitte für die großen Diagonalen verwendet. Deren Steifigkeit wird nun dadurch berücksichtigt, dass bei Erreichen der Streckgrenze, siehe Tabelle 7.1, das linear elastische in ein plastisches Materialverhalten übergeht.

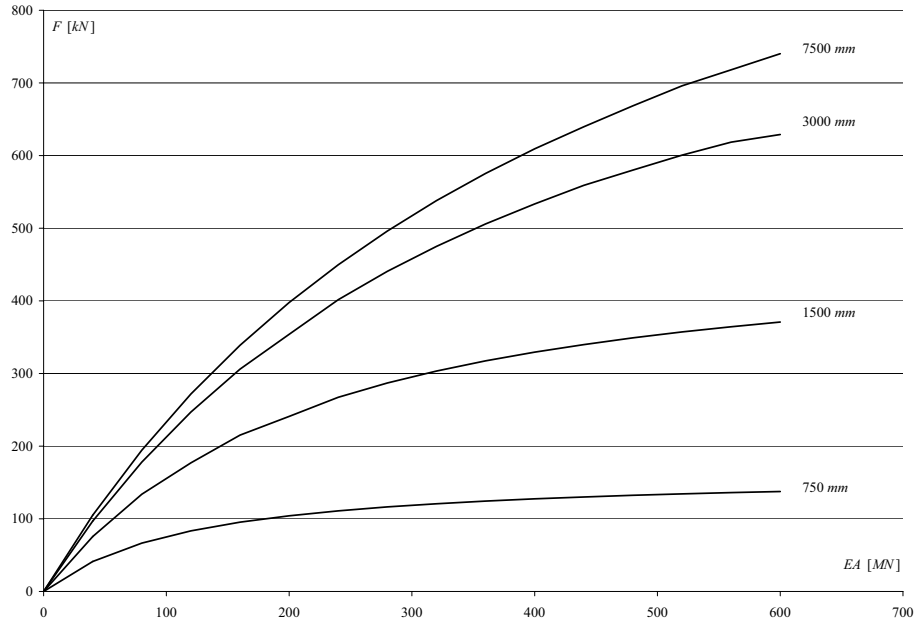


Bild 7.8: Kritische Lasten in Abhängigkeit von der Untergurtsteifigkeit EA_{UG} und der Breite b

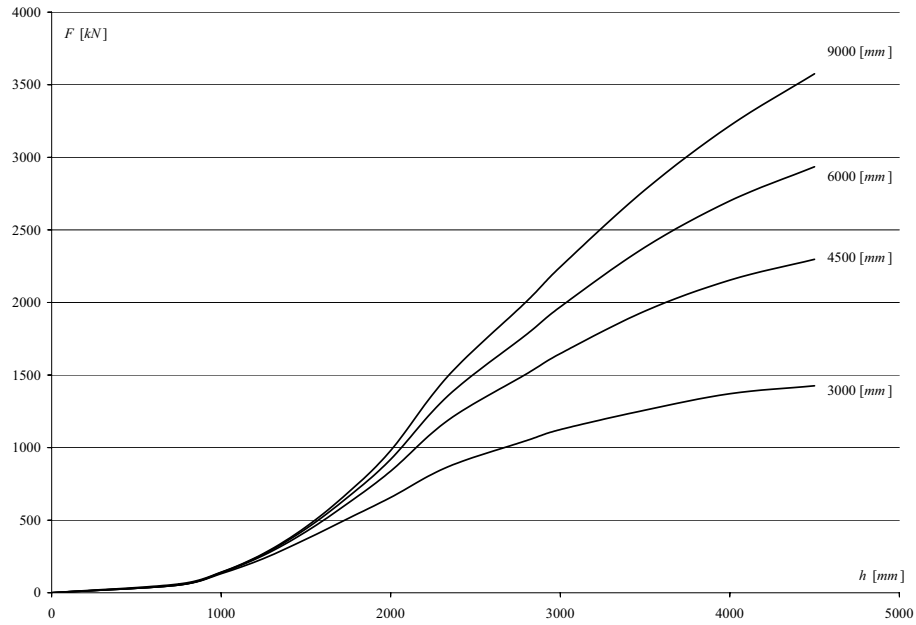


Bild 7.9: Kritische Lasten in Abhängigkeit von der Binderhöhe h und der Breite b

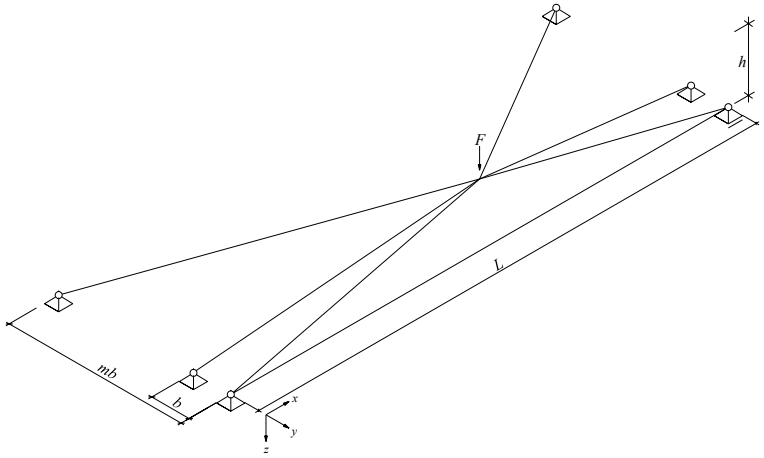


Bild 7.10: System 1 mit erweitertem Sekundärsystem

In Bild 7.11 sind die Last-Verschiebungsbeziehungen für die Berechnungen (a ohne, b mit linear elastischer und c mit bilinearer, elastisch-plastischer großer Diagonale) dargestellt.

Die Kurven zeigen das erwartete Tragverhalten des kombinierten Sekundärsystems. Die Berechnung b mit elastischer Windrispe führt auf die größte kritische Last, die eine Überbeanspruchung der Diagonale verursacht, wie Rechnung c zeigt. Es ist daher darauf zu achten, dass die Beanspruchbarkeit der Windrispe nicht überschritten wird.

Weiterhin zeigt Bild 7.11 deutlich, dass die kritische Last bei Rechnung c erst bei baupraktisch nicht vertretbaren horizontalen Verschiebungen erreicht wird.

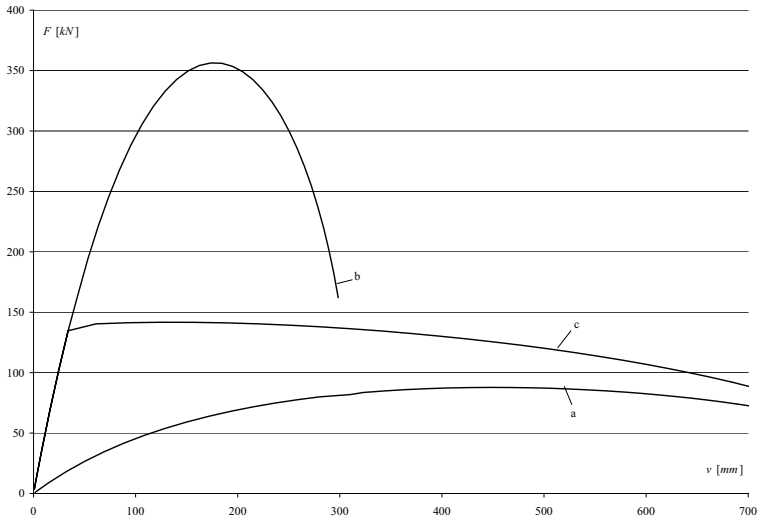
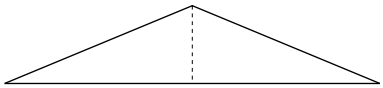
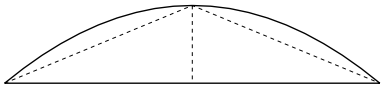
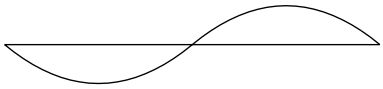
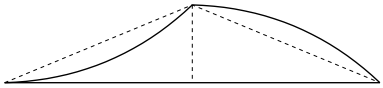


Bild 7.11: Last-Verschiebungsbeziehungen für verschiedene Sekundärsysteme

7.4.2 System 2

Die Eigenwertanalyse in Abschnitt 7.3.2 hat gezeigt, dass die symmetrischen Eigenformen durch eine Kombination aus globalen und lokalen Imperfektionen und die antimetrischen Eigenformen durch lokale Imperfektionen beschrieben werden können. Mit den Ergebnissen aus Kapitel 5 werden die in Tabelle 7.6 in der $x - y$ Ebene angegebenen Imperfektionsformen für verschiedene Größen untersucht.

Tabelle 7.6: Imperfektionsformen für System 2

1. globale Imperfektion 
2. lokale Imperfektion mit $e_{O,r} = e_{O,l}$
3. Kombination aus 1. und 2. 
4. lokale Imperfektion mit $e_{O,r} = -e_{O,l}$ 
5. Kombination aus 1. und 4. 

In den Bildern 7.12 bis 7.16 sind die Last-Verschiebungsbeziehungen, Verschiebung v des Firstpunktes, für die in Tabelle 7.6 angegebenen Imperfektionsformen mit den globalen Imperfektionen $\varphi_0 h = h/a$ und den lokalen Imperfektionen $e_O = L/b$ dargestellt.

Imperfektionsform 3, die eine Kombination der Formen 1 und 2 darstellt, ist affin zur 1. Eigenform in Bild 7.4. Die Imperfektionsformen 1 und 2 sind zumindest in Teilen affin zur 1. Eigenform. Daher zeigen alle drei Last-Verschiebungsbeziehungen ein ähnliches Verhalten bei zunehmender Imperfektionsgröße. Die theoretisch ermittelte kritische Last wird auch bei sehr kleiner Imperfektion nur näherungsweise erreicht, da bei der Eigenwertanalyse nur die linearen Anteile der Verschiebungen, nicht aber der Vorknickzustand berücksichtigt werden. Die Abschätzung der Eigenwerte erscheint bei einer prozentualen Abweichung von 11% von der geometrisch nichtlinear ermittelten kritischen Last dennoch brauchbar.

Zusätzlich zu den Last-Verschiebungsbeziehungen der imperfekten Systeme ist in den Bildern 7.12 bis 7.16 die Lösung für das perfekte System im Sinne des Ab-

schnittes 5.1.1 eingezeichnet. Das unsymmetrische Layout der Verbandsdiagonalen führt zu einer, wenn auch sehr kleinen, Firstverschiebung. Damit kann die kritische Last auch beim perfekten System nicht über die zum ersten Eigenwert gehörende Last gesteigert werden.

Die Last-Verschiebungsbeziehungen zeigen einen ähnlichen Verlauf, wie das in Abschnitt 3.4 behandelte Beispiel 2. Das System versagt nach dem Erreichen der kritischen Last, d.h. es ist bösartig im überkritischen Bereich. In den Bildern 7.12 bis 7.14 ist weiterhin die Entwicklung der kritischen Last in Abhängigkeit von der Größe der Imperfektionen eingetragen. Diese Funktion wird auch als Singulärpfad, siehe z.B. Reitinger in [51], bezeichnet. Daraus wird erkennbar, dass die kritische Last unterlinear von der Größe der Imperfektionen abhängig ist. Die Stabwerkstruktur ist demzufolge imperfektionssensitiv.

Die beiden Bilder 7.15 und 7.16 geben die Last-Verschiebungsbeziehungen an, die affin zur 2. Eigenform sind. Im Unterschied zu den Imperfektionsformen 1 bis 3 ist die Unterlinearität mit wachsender Imperfektionsgröße wesentlich stärker ausgeprägt. Imperfektionsform 4 zeigt ein sehr steifes Verhalten bis in die Nähe des Versagenspunktes, da die Größe der Imperfektion Einfluss auf einen interessanten Effekt des Systems hat. Die vorgekrümmten Obergurte stützen sich auf den als Seil wirkenden Untergurt ab. Erst bei Annäherung an die kritische Last des ersten Eigenwertes kommt es zu einem seitlichen Ausweichen des Firstpunktes infolge der speziellen geometrischen Eigenschaften des Verbandes.

Dieser Übergang von der 4. Imperfektionsform in die 1. Eigenform ist in Bild 7.17 für zwei verschiedene Größen der Imperfektionen angegeben. Es ist deutlich zu erkennen, dass mit dem Ausweichen des Firstpunktes das gesamte Tragwerk in diese Richtung gezogen wird. Dieses Tragverhalten beschreibt Petersen in [45] am geraden Druckstab mit antimetrischer Belastung und wurde schon von Zimmermann in [59] am Druckstab mit gegengleichen Hebelarmen behandelt. Bei der 5. Imperfektionsform tritt dieser Effekt nicht mehr so deutlich hervor, da der Firstpunkt a priori verschoben ist.

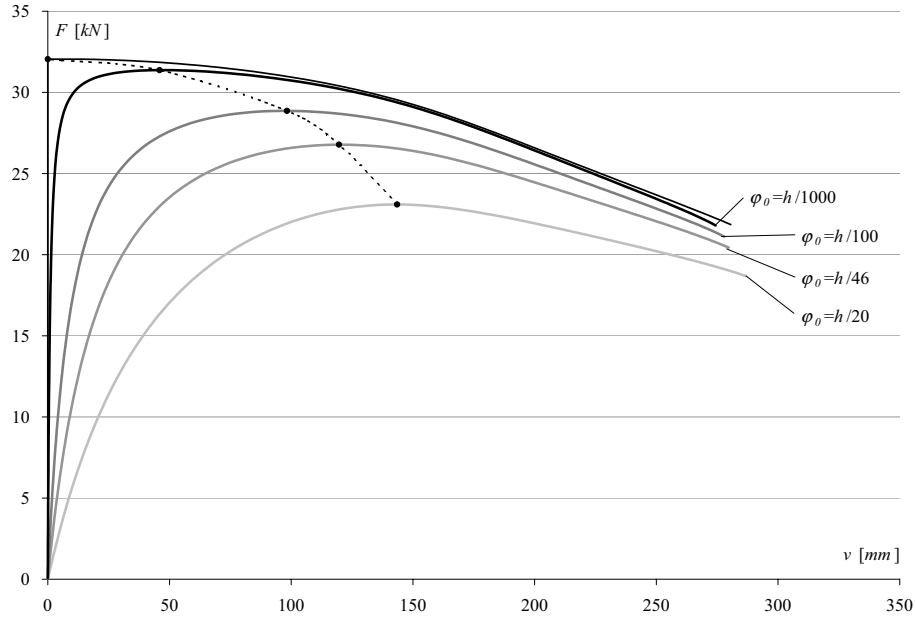


Bild 7.12: Last-Verschiebungsbeziehung für Imperfektionsform 1

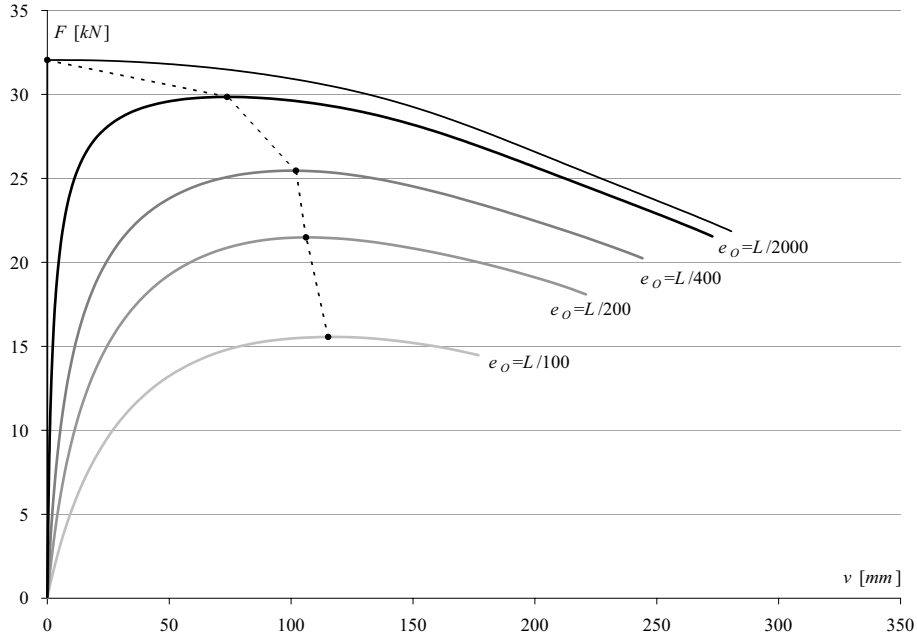


Bild 7.13: Last-Verschiebungsbeziehung für Imperfektionsform 2

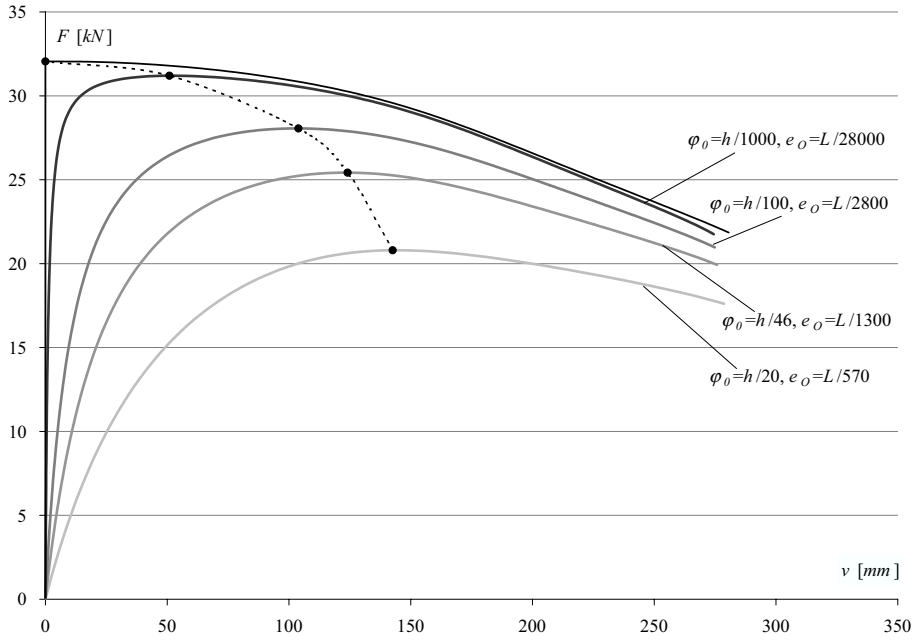


Bild 7.14: Last-Verschiebungsbeziehung für Imperfektionsform 3

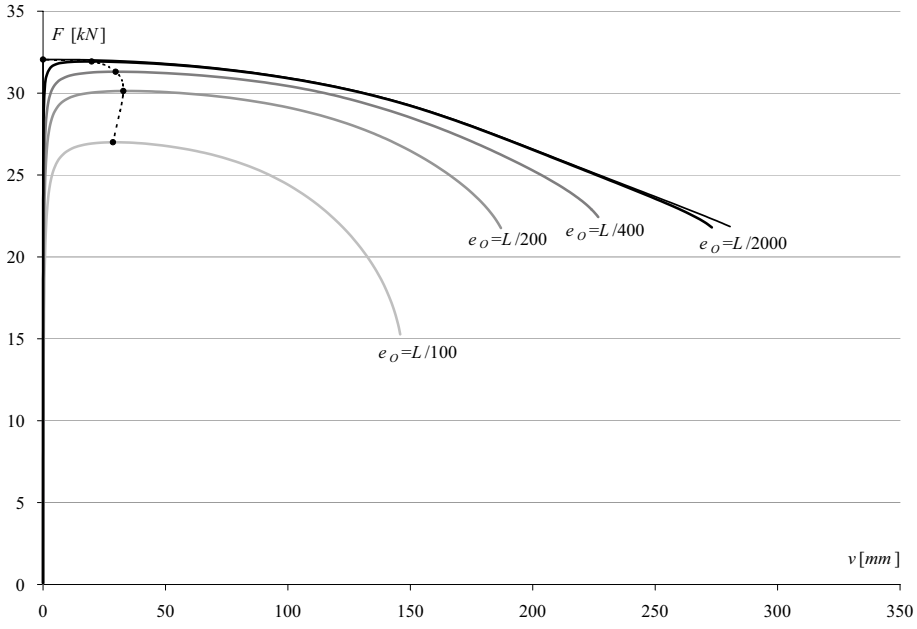


Bild 7.15: Last-Verschiebungsbeziehung für Imperfektionsform 4

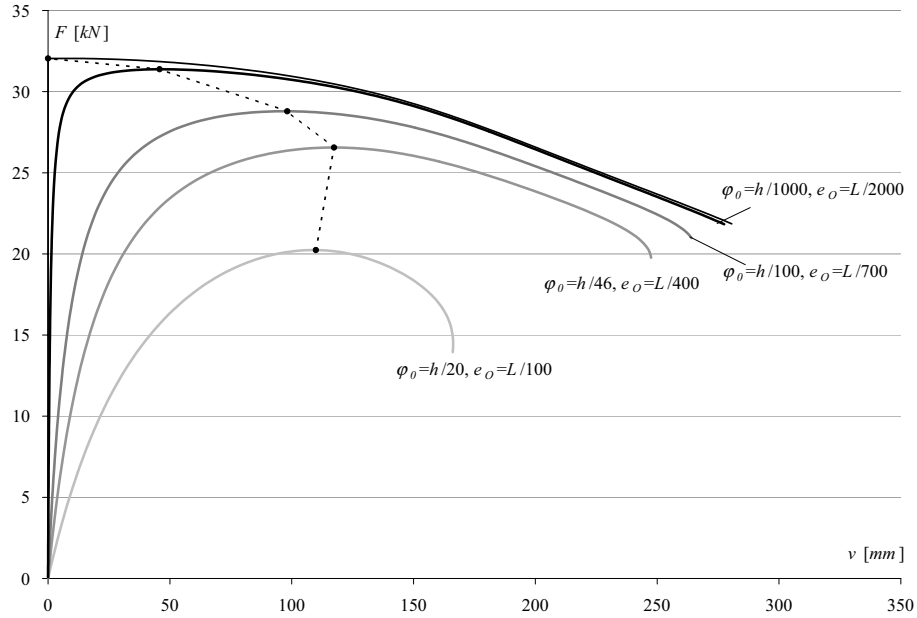


Bild 7.16: Last-Verschiebungsbeziehung für Imperfektionsform 5

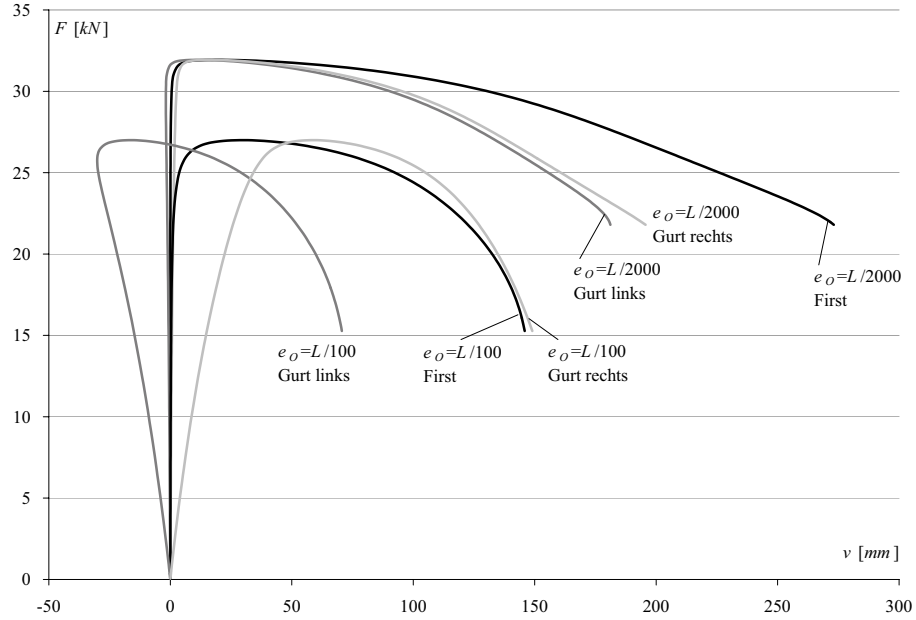


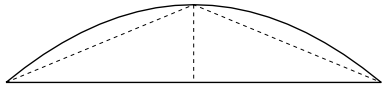
Bild 7.17: Wechsel der Imperfektionsform 4 in die 1. Eigenform

7.4.3 System 3

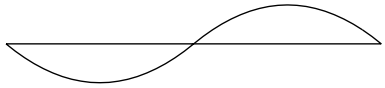
Aufbauend auf den Untersuchungen des Abschnittes 7.4.2 werden für die Berechnungen des Systems 3 nur noch zwei Imperfektionsformen berücksichtigt. Die untersuchten Imperfektionen ergeben sich aus der ersten Eigenform, siehe Bild 7.5, und der in Kapitel 5 angegebenen Empfehlungen für geometrische Imperfektionen. Tabelle 7.7 zeigt die beiden vorgegebenen Imperfektionsformen. Die 1. Imperfektionsform ist eine kombinierte Imperfektion aus den Imperfektionen 1 und 2 nach Tabelle 7.6.

Tabelle 7.7: Imperfektionsformen für System 3

1. kombinierte Imperfektion



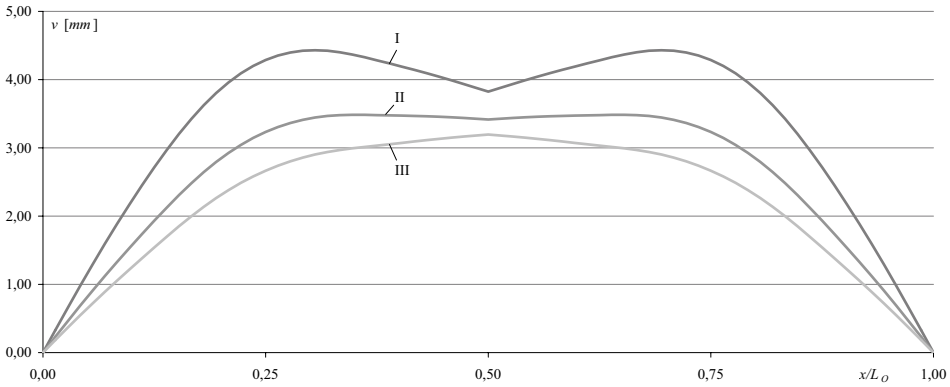
2. lokale Imperfektion mit $e_{O,r} = -e_{O,l}$



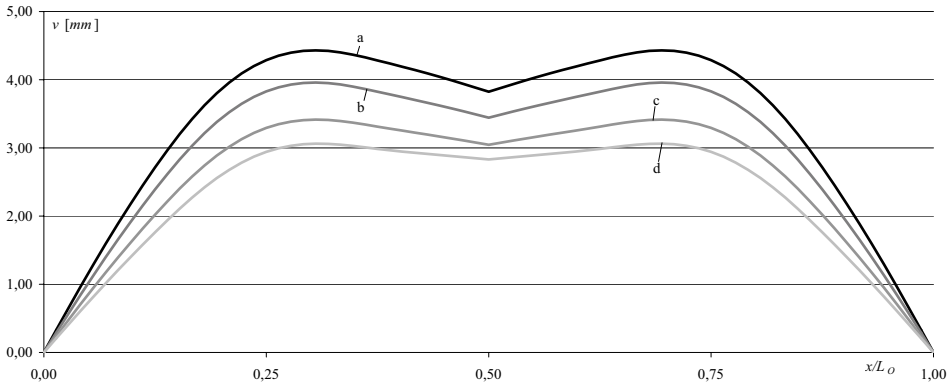
Da für die spätere Ermittlung von Ersatzlastgruppen Vergleichsgrößen erforderlich sind, werden die Berechnungen für das Gesamtsystem überwiegend auf Gebrauchslastniveau durchgeführt.

Für die Gebrauchslasten werden einschließlich aller Kombinationsbeiwerte nach der Norm DIN 1055-100 $F_{ges} = 200kN$ angesetzt. Dies entspricht bei der gewählten Grundfläche von $7,5m \cdot 10,0m$ einer Flächenlast bezogen auf die Grundfläche von $f_{ges} = 2,67kN/m^2$. In dieser Belastung sind als ständige Einwirkungen die gemittelten Eigengewichte der Binder, Pfetten und Dachaufbauten ebenso enthalten, wie als veränderliche Einwirkungen mögliche Schneelasten. Auf eine genauere Berücksichtigung der Lasten wird im Hinblick auf eine einfache und vergleichbare Abschätzung des Tragverhaltens verzichtet.

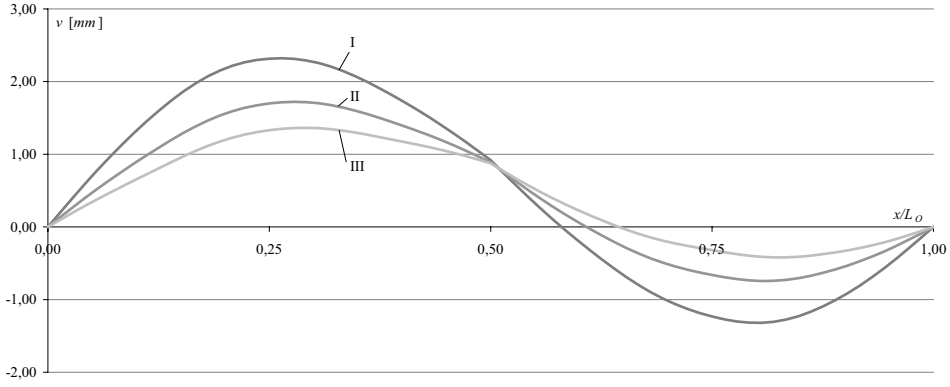
Die Berechnungen werden für eine Steifigkeit der Windrispe W von $EA_D = 0,6 \cdot 25,2MN$ durchgeführt. Gerold gibt in [20] diese Größenordnung an und berücksichtigt mit dieser Abminderung der Dehnsteifigkeit auf 60% die Temperaturdehnung und den Rispendurchhang. Bei einer Höhe $h = 1250mm$ und einer Verbandssteifigkeit von 10% ergibt sich eine kritische Last von $F_{crit} = 627kN$.



(a) Imperfektionsform 1: I-10%, II-30%, III-100% und $h = 1250mm$



(b) Imperfektionsform 1: a-$h = 1250mm$, b-$h = 1500mm$, c-$h = 2000mm$, d-$h = 3000mm$ und einer Verbandssteifigkeit von 10%



(c) Imperfektionsform 2: I-10%, II-30%, III-100% und $h = 1250mm$

Bild 7.18: Verschiebungen der Verbandsobergurte für verschiedene Steifigkeiten der Verbände (a, c) bzw. für variable Binderhöhen (b)

Bild 7.18a zeigt die Verschiebungen der Verbandsobergurte in y-Richtung für verschiedene Steifigkeiten der parallelgurtigen Verbände in Obergurtebene der Satteldachbinder bzw. der Primärsysteme für die Imperfektionsform 1 nach Tabelle 7.7, siehe Bild 7.18b. In Bild 7.18c sind die Verschiebungen für verschiedene Verbandssteifigkeiten für Imperfektionsform 2 nach Tabelle 7.7 dargestellt. Besonders deutlich zeigt sich bei dieser Imperfektionsform eine Verschiebung v des Firstpunktes, die offensichtlich unabhängig von der Verbandssteifigkeit ist.

Vergleich der Systeme 1 und 2

Aus Bild 7.8 kann für System 1 für eine Breite $b = 750mm$, dies entspricht den geometrischen Werten des Systems 2, und eine Untergurtsteifigkeit $EA_{UG} = 97MN$, die aus der Anpassung der vertikalen Bindersteifigkeit des Systems 1 an das System 2 resultiert, die kritische Last $F_{crit} = 78kN$ abgelesen werden. Für System 2 ergibt sich eine kritische Last von $F = 6 \cdot 25kN = 150kN$ bei einer Imperfektionsgröße nach Kapitel 5, siehe Bild 7.14.

Die Durchschlaglast, die für System 1 mit $F_{Durch} = 400kN$ wesentlich geringer als für System 2 mit $F_{Durch} = 705kN$ ist, beschreibt den einen Versagensmechanismus. Dabei stellt die Durchschlaglast von System 2 keine analytisch ermittelte Größe dar, sondern ist das Ergebnis einer FEM-Simulation. Wird die Steifigkeit des Untergurtes von System 1 derart erhöht, dass die Durchschlaglast für System 1 gleich der des Systems 2 ist, steigt die kritische Last bis auf $F_{crit} = 120kN$ an. Die nun noch vorhandene Differenz ist in dem zweiten Versagensmechanismus, dem Kippen, begründet.

7.5 Geometrisch lineare Berechnung

7.5.1 Ersatzlastgruppe für globale Imperfektionen

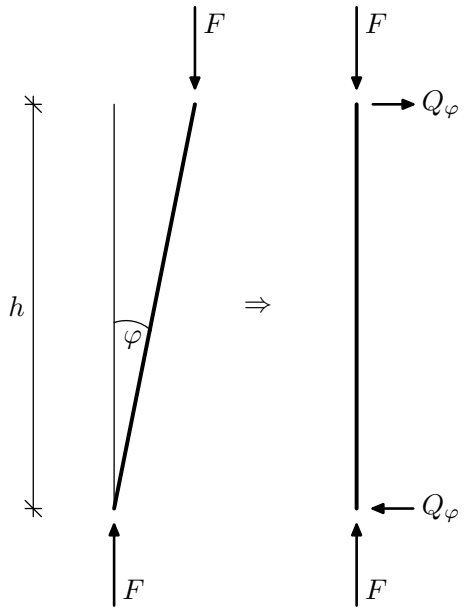


Bild 7.19: Ersatzlastgruppe für die globale Imperfektion

Bild 7.19 zeigt eine Ersatzlastgruppe für die in Kapitel 5 definierte globale Imperfektion, wie sie in den Bildern 6.1 und 6.6 schon eingeführt wurde. Diese Ersatzlastgruppe erfüllt zwar das Kräftegleichgewicht, jedoch nicht das Momentengleichgewicht. Sie kann nach Bild 6.6 nur ins Gleichgewicht gebracht werden, wenn Teile des räumlichen Sekundärsystems beansprucht werden. Die Abschätzung der Ersatzlast erfolgt mit der Vergrößerungsfunktion nach Gleichung 3.6 in der Form:

$$Q_\varphi = F(\varphi_0 + \varphi_w)\left(\frac{1}{1-\alpha_D}\right)\left(\frac{1}{1-\alpha_K}\right) \tag{7.6}$$

mit $\alpha_D = \dfrac{F}{F_{Durch}}$

und $\alpha_K = \dfrac{F}{F_{Kipp}}$.

In Gleichung 7.6 sind die beiden Versagensfälle des räumlichen Stabsystems eingearbeitet, die in Abschnitt 7.4.1 näher untersucht werden. Die Durchschlaglast des seitlich elastisch gestützten Zweibeins ist

$$F_{Durch} = \frac{4EA_{UG}EA_{OG}L_O}{EA_{OG}L + 2EA_{UG}L_O}\gamma_D \tag{7.7}$$

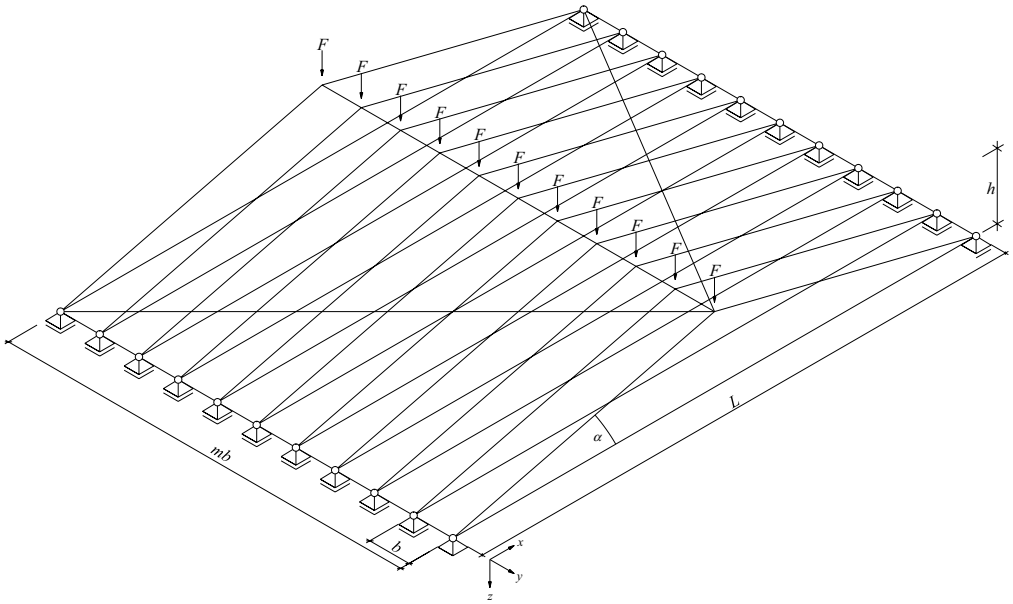


Bild 7.20: System 1 erweitert

mit $\gamma_D = \sin^3(\alpha - \varphi_D)$, $\tan\alpha = \frac{2h}{L}$

und φ_D aus $\cos^3(\alpha - \varphi_D) - \cos\alpha = 0$

und kann bei PETERSEN in [45] nachgelesen werden. Die Kipplast ergibt sich nach Abschnitt 3.4 zu

$$F_{Kipp} = Kh \tag{7.8}$$

mit $K = 2\dfrac{EA_D}{L_D}\dfrac{b^2}{L_D^2}$.

Der Einfluss der Lage der Windrispe W auf die horizontale Verschiebung des Firstpunktes wird durch den Winkel φ_w berücksichtigt. Der Winkel φ_w folgt aus der Verdrehung der Primärsysteme infolge ihrer eigenen Durchbiegung und wird gemäß Kapitel 3 als klein angenommen. Der Winkel φ_w ergibt sich direkt aus der Firstverschiebung w zu:

$$\varphi_w = \frac{\sqrt{h^2 + b^2 - (h-w)^2} - b}{h}. \tag{7.9}$$

Die Ersatzlastgruppe Q_φ ist global anzusetzen, d.h. Q_φ am First und $\frac{1}{2}Q_\varphi$ an jeder Traufseite. Wird die Diagonale zur seitlichen Halterung mehrerer Primärsysteme verwendet, vgl. Bild 7.20, so ist in der Ersatzlastgruppe aus Gleichung 7.6 für F die gesamte Last F_{ges} einzusetzen. Weiterhin muss dann in den Gleichungen 7.8 und 7.9 die Breite b entsprechend Bild 7.20 durch mb, mit $m = n - 1$, ersetzt werden.

Bild 7.21 zeigt die Gegenüberstellung der Ersatzlasten Q_φ nach Gleichung 7.6 und der bei der FEM-Simulation ermittelten Werte $Q_{\varphi,FEM}$, siehe Tabelle 7.8, für ver-

schiedene Abspannbreiten mb und einer Binderanzahl von $n = 1$ bis $n = 12$. Die aufgebrachte Gesamtlast ist dabei bei allen Systemen $F_{ges} = 200kN$. Die Ersatzlasten $Q_{\varphi,FEM}$ entsprechen den y-Komponenten der Windrispenkräfte beider Dachhälften.

Es ist zu erkennen, dass für eine kleine Anzahl Binder n der Quotient größer wird. Diese Entwicklung folgt aus der Änderung des Vergrößerungsfaktors für die Durchschlaglast. Die äußere Belastung bleibt für jede Binderanzahl n konstant jedoch verringert sich die Beanspruchung für den einzelnen Binder mit wachsendem n, d.h. das Verhältnis Auflast zu Durchschlaglast wird immer kleiner und der Vergrößerungsfaktor $\frac{1}{(1-\alpha_D)}$ nähert sich dem Wert 1. Für den praxisüblichen Bereich von $6-12$ Bindern je Windrispenpaar sind die Abweichungen der Abschätzung von der FEM-Simulation sehr gering.

Tabelle 7.8: $Q_{\varphi,FEM}$ in $[kN]$

	n	1	2	4	8	12
2	$mb = 3000mm$, $h = 1250mm$	$9,725$	$6,116$	$5,232$	$4,827$	$4,695$
3	$mb = 7500mm$, $h = 1250mm$	$6,740$	$4,900$	$4,544$	$4,375$	$4,320$
4	$mb = 7500mm$, $h = 2500mm$	$4,726$	$4,340$	$4,232$	$4,181$	$4,165$

Ausgehend von diesen Betrachtungen wird die Abschätzung nach Gleichung 7.6 für System 3 ebenfalls angewendet, auch wenn, wie in Abschnitt 7.4.3 bereits dargestellt, die Durchschlaglast des seitlich elastisch gestützten Zweibeins von der Durchschlaglast des Dreieckbinders abweicht. Die Änderung der Steifigkeit der Primärsysteme, mit zunehmender Binderhöhe erhöht sich auch die vertikale Steifigkeit, kann mit dieser Annahme aber immer noch verfolgt werden.

Im Sinne einer einfachen Abschätzung wird auch für System 3 angenommen, dass die Lasten konzentriert in den Firstpunkten angreifen. Der Einfluss der Laststellung auf die Größe der Ersatzlasten kann auf diese Weise dann natürlich nicht berücksichtigt werden.

Zur Ermittlung der Beanspruchungen des Sekundärsystems wird wie bei System 1 die Beanspruchung der Windrispe untersucht. Da die Windrispe, abweichend von System 1, bei System 3 an jedem Obergurt angeschlossen ist, wird die nun nicht mehr konstante Beanspruchung der Windrispe aufgeteilt. Als Vergleichsgröße dient der Mittelwert der Windrispennormalkraft. Die fehlenden Anteile der Windrispennormalkraft werden in Abschnitt 7.5.2 behandelt. Zusätzlich muss die Beanspruchung des parallelgurtigen Verbandes berücksichtigt werden. Dazu sind die y-Komponenten der Normalkräfte der Enddiagonalen zu verwenden. Der Mittelwert dieser Normalkraftkomponenten wird dabei den Beanspruchungen $Q_{\varphi,FEM}$ zugeordnet. Die Normalkraftverteilungen der Windrispen und Enddiagonalen nach Abzug der Mittelwerte werden in Abschnitt 7.5.2 behandelt.

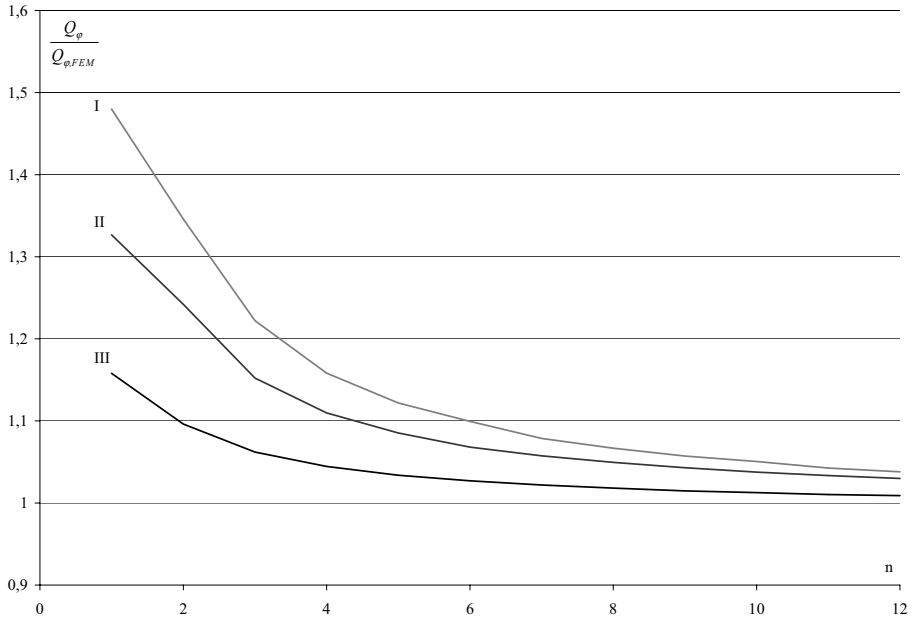


Bild 7.21: Quotient aus Q_φ nach Gleichung 7.6 und $Q_{\varphi,FEM}$ für System 1 erweitert

I (Tabelle 7.8 Zeile 2)

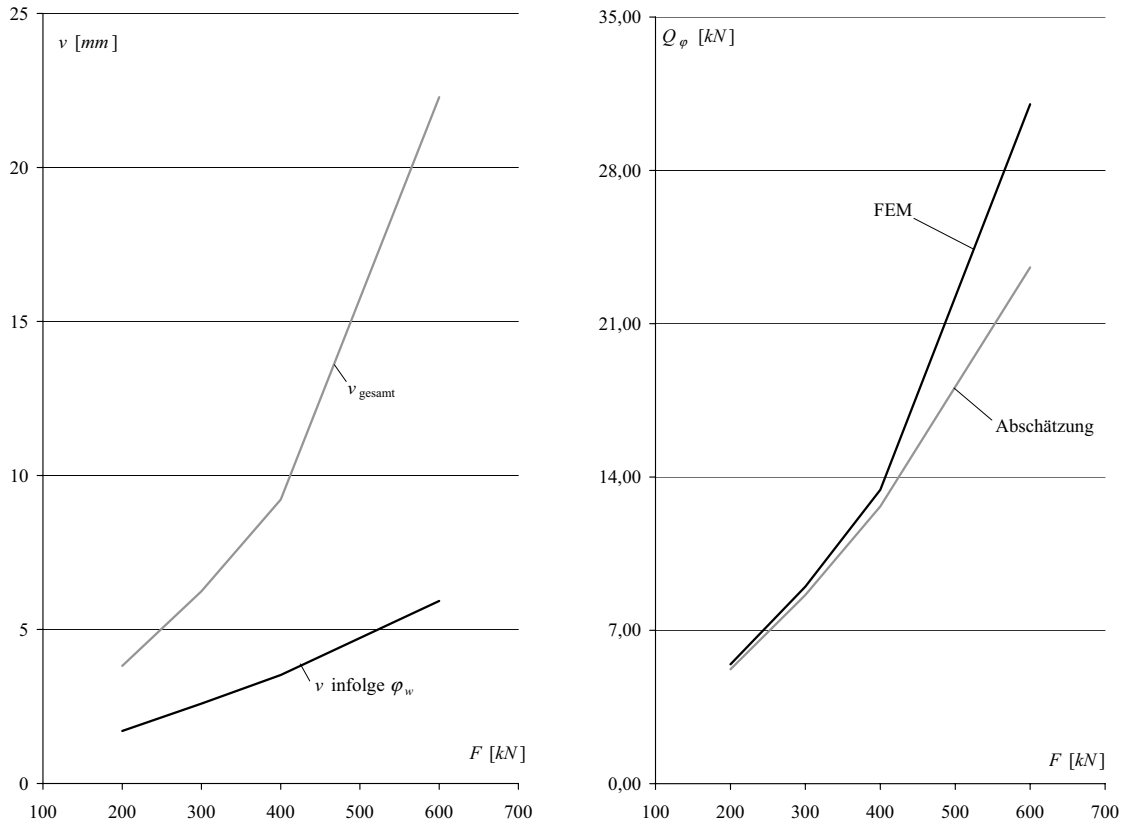
II (Tabelle 7.8 Zeile 3)

III (Tabelle 7.8 Zeile 4)

Bild 7.22a zeigt die Verschiebungen des Firstpunktes in y-Richtung von System 3 mit $h = 1250mm$ und $mb = 7500mm$ für unterschiedliche Lastniveaus. Dabei zeigt sich deutlich, dass die Verschiebungen infolge des Winkels φ_w nach Gleichung 7.9, die aus den Verschiebungen in z-Richtung berechnet werden, wie erwartet im Wesentlichen linear von der Last abhängen. Für die Gesamtverschiebungen in y-Richtung gilt dies jedoch nicht mehr. Hier ist eine überlineare Entwicklung der Verschiebungen erkennbar.

In Bild 7.22b sind für die eben beschriebenen Berechnungen die Lasten Q_φ nach Gleichung 7.6 und $Q_{\varphi,FEM}$ gegenübergestellt. Erst bei einem Lastniveau von $F = 600kN$, das nach Abschnitt 7.4.3 aber schon in der Nähe der kritischen Last für das System liegt, gibt es eine merkliche Abweichung der Abschätzung von der Simulation. Auf dem Niveau der Gebrauchslast wird das Tragverhalten für die spezielle Geometrie geringfügig überschätzt.

Die Auswertung für verschiedene Binderhöhen und unterschiedliche Steifigkeiten des parallelgurtigen Verbandes in Bild 7.23 zeigt geringe Abweichungen der Abschätzung nach Gleichung 7.6 von der FEM-Simulation. Bei größer werdenden Dachneigungs-



(a) Verschiebung v des Firstpunktes

(b) $\sum Q_\varphi$ FEM und Abschätzung

Bild 7.22: Auswertungen für System 3-II für verschiedene Lastniveaus

winkel wird die Abschätzung ungenauer und für sehr kleine Dachneigungswinkel liegt die Abschätzung für Verbandssteifigkeiten von 10% und 30% etwas unter den Werten der FEM-Simulation. Bild 7.23 zeigt deutlich, dass die Steifigkeit des Verbandsbinders einen untergeordneten Einfluss auf die Größe von $Q_{\varphi,FEM}$ hat.

Als Vergleichsgröße sind in Bild 7.23 die Ergebnisse einer FEM-Simulation von System 3 ohne Verbandsbinder eingetragen. Die Auswertungen lassen erkennen, dass die Annahmen von System 1, Einzellasten im First und starre Obergurte, bei System 3 bis auf die Tragkonstruktionen mit einer Höhe $h = 1250mm$ gute Ergebnisse liefern. Lediglich bei den flachen Stabwerken wird das Tragverhalten geringfügig überschätzt. Zusätzlich ist in Bild 7.23 $Q_{\varphi,DIN}$ eingetragen, die aus der Auflagerkraft der konstanten Ersatzlast ermittelt werden kann.

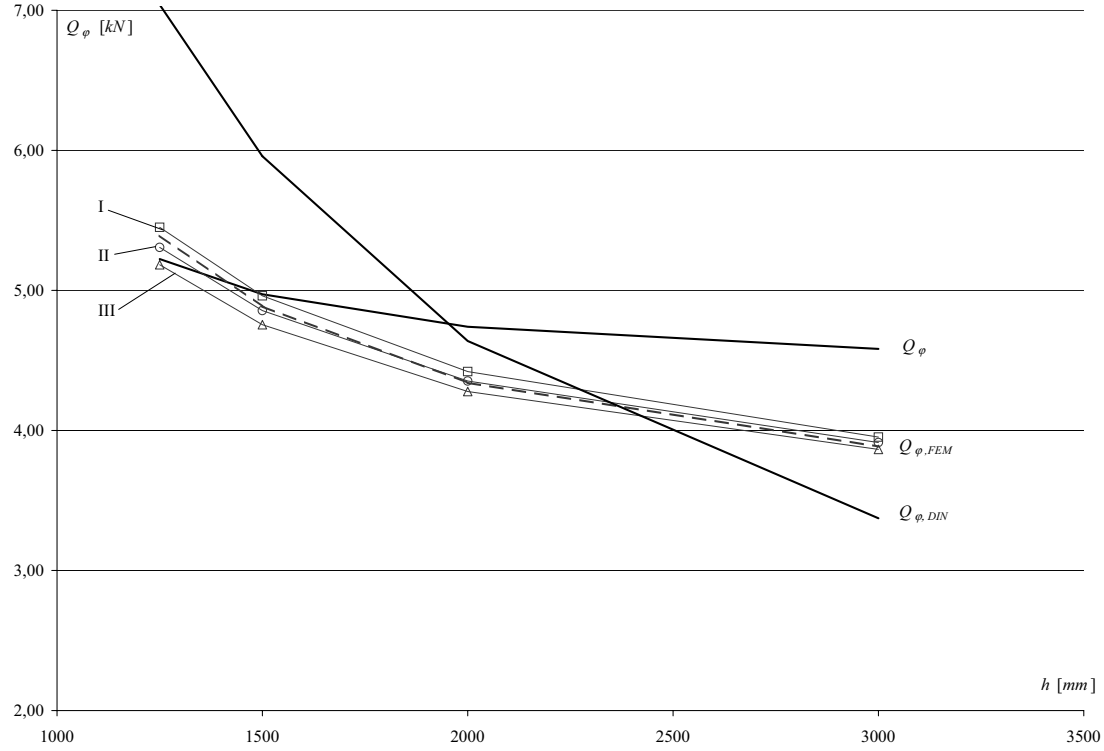


Bild 7.23: Q_φ nach Gleichung 7.6, $Q_{\varphi,FEM}$ und $Q_{\varphi,DIN}$ für System 3

I Verbandssteifigkeit 10%

II Verbandssteifigkeit 30%

III Verbandssteifigkeit 100%

- - - ohne Verband

7.5.2 Ersatzlastgruppe für lokale Imperfektionen

Bild 7.24 zeigt noch einmal den durch eine konstante Normalkraft beanspruchten imperfekten Stab und die zugehörige Ersatzlastgruppe mit q_e nach Gleichung 7.11. Analog zu Abschnitt 7.5.1 wird auch für diese Ersatzlastgruppe eine Vergrößerungsfunktion mit einer einfach zu ermittelnden kritischen Last angegeben.

Für die Ermittlung einer Ersatzlastgruppe für die lokalen Imperfektionen gemäß Kapitel 5 wird auf eine in der Literatur oft verwendete Darstellung zurückgegriffen und hinsichtlich der Vergrößerungsfunktion überarbeitet. Diese Ersatzlast kann nach Gerold [19] in der Form

$$q_e = \frac{\pi^2 m N}{L_O} \frac{e}{L} \left(\frac{1}{1-\alpha} \right) \sin \frac{\pi x}{L_O} \tag{7.10}$$

angegeben werden. Sie stellt die Lösung der Differentialgleichung des elastisch gebetteten Biegestabes unter konstanter Normalkraftbeanspruchung bei Verwendung sinusförmiger Ansätze für die lokale Imperfektion und die Biegelinie dar. Für die Berechnung des Faktors α verwendet GEROLD neben der Biegesteifigkeit der Gurte auch die Schubsteifigkeit der Aussteifungskonstruktion.

Zur praktikableren Handhabbarkeit vereinfacht KESSEL in [30] diese Ersatzlast zu

$$q_e = \frac{2\pi m N}{L_O} \frac{e}{L} \left(\frac{1}{1 - \alpha_B} \right), \tag{7.11}$$

wobei für N die maximale Normalkraft einzusetzen ist und α_B aus der vertikalen Biegesteifigkeit der Primärsysteme berechnet wird. KESSEL versucht auf diese Weise das räumliche Tragverhalten bei der Abschätzung der Ersatzlastgruppen zu berücksichtigen.

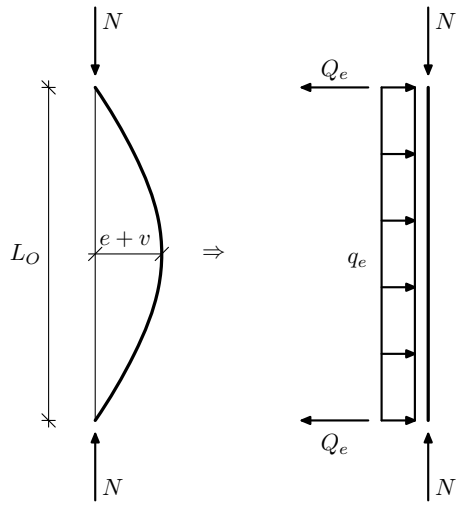


Bild 7.24: Ersatzlastgruppe für die lokale Imperfektion

Für die Berechnungen des Systems 1 in Abschnitt 7.4.1 ist eine ausreichende Biegesteifigkeit der gedrückten Stäbe Voraussetzung. Bei System 3 wird die Biegesteifigkeit in z-Richtung durch die Füllstäbe der Satteldachbinder und in y-Richtung durch den parallelgurtigen Verband in Verbindung mit der Windrispe W gewährleistet. Da mit der Ersatzlastgruppe die lokalen Imperfektionen und deren Auswirkungen auf das Sekundärsystem ausgedrückt werden sollen, wird für die Vergrößerungsfunktion die Schubsteifigkeit des Verbandsbinders verwendet. PETERSEN zeigt in [45] den Einfluss der Schubsteifigkeit auf die Knicklast des geraden Druckstabes. Der Vorschlag für die Ersatzlast Q_e folgt damit zu

$$Q_e = q_e \frac{L_O}{2} \tag{7.12}$$

mit $q_e = \dfrac{2\pi m N}{L_O}\dfrac{e}{L}\left(\dfrac{1}{1-\alpha_V}\right)$

und $\alpha_V = \dfrac{F}{F_{Schub}}$.

Die Schubsteifigkeit kann näherungsweise über den Neigungswinkel und die Dehnsteifigkeit der Verbandsdiagonalen berechnet werden (KOLLBRUNNER [33]). Sie ergibt sich zu:

$$F_{Schub} = c \cdot EA_F \sin^2(\beta_F)\cos(\beta_F) \tag{7.13}$$

mit β_F- Neigungswinkel der Verbandsdiagonalen,

EA_F- Dehnsteifigkeit der Verbandsdiagonalen

und c- Faktor zur Berücksichtigung der Steifigkeit der Verbindungsmittel.

Als Vergleichsgröße dient die um die, aus der globalen Imperfektion resultierende, konstante Windrispenbeanspruchung reduzierte Normalkraft der Windrispe W.

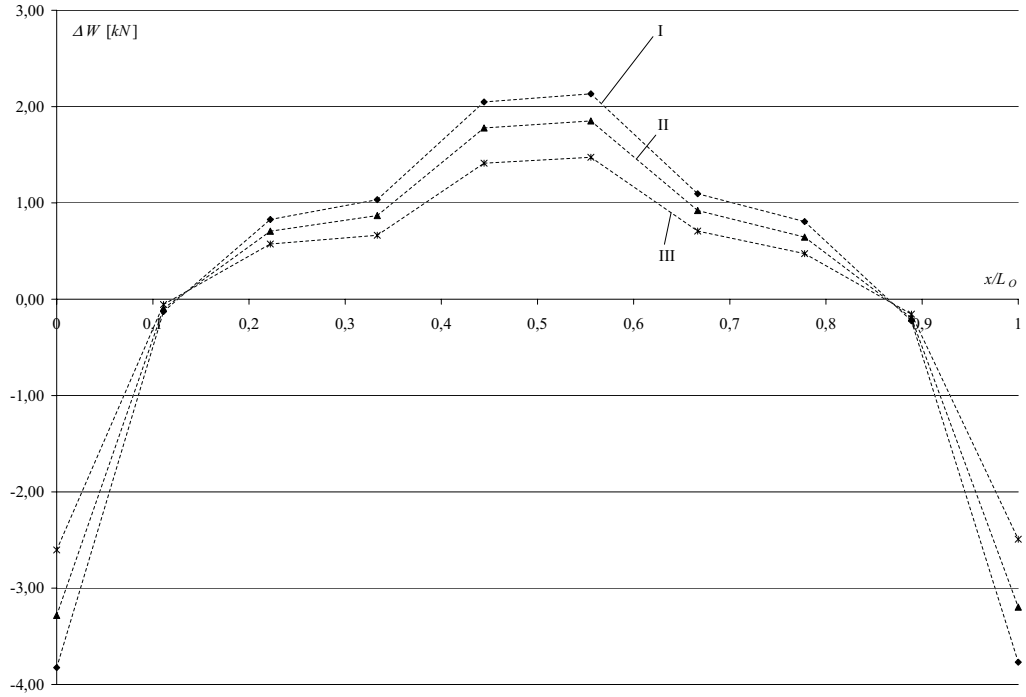


Bild 7.25: Änderungen der Windrispenkraft ΔW für variable Steifigkeiten der Verbandsbinder (I- 10%, II- 30% und III- 100%) bei einer Höhe $h = 1250mm$

Die Bilder 7.25 und 7.26 zeigen die y-Komponenten der Änderungen der Rispennormalkräfte ΔW von der Traufe zum First. Es ist deutlich eine Gleichgewichtsgruppe

zu erkennen. Die Kräfte an der Traufe und am First können als Auflagerkräfte interpretiert werden und die übrigen Einzelkräfte als Belastung des Sekundärsystems. Bild 7.25 enthält zusätzlich die Verteilung der Kräfte für System 3 ohne Verbandsbinder (durchgezogene Linie). Die nun ablesbaren Differenzen entsprechen direkt der Beanspruchung der parallelgurtigen Verbandsbinder.

Als Folge daraus zeigt Bild 7.25, dass mit zunehmender Steifigkeit des Verbandsbinders die Beanspruchung der Windrispe abnimmt. Den gleichen Einfluss hat die in Bild 7.26 dargestellte Zunahme der Steifigkeit der Primärsysteme.

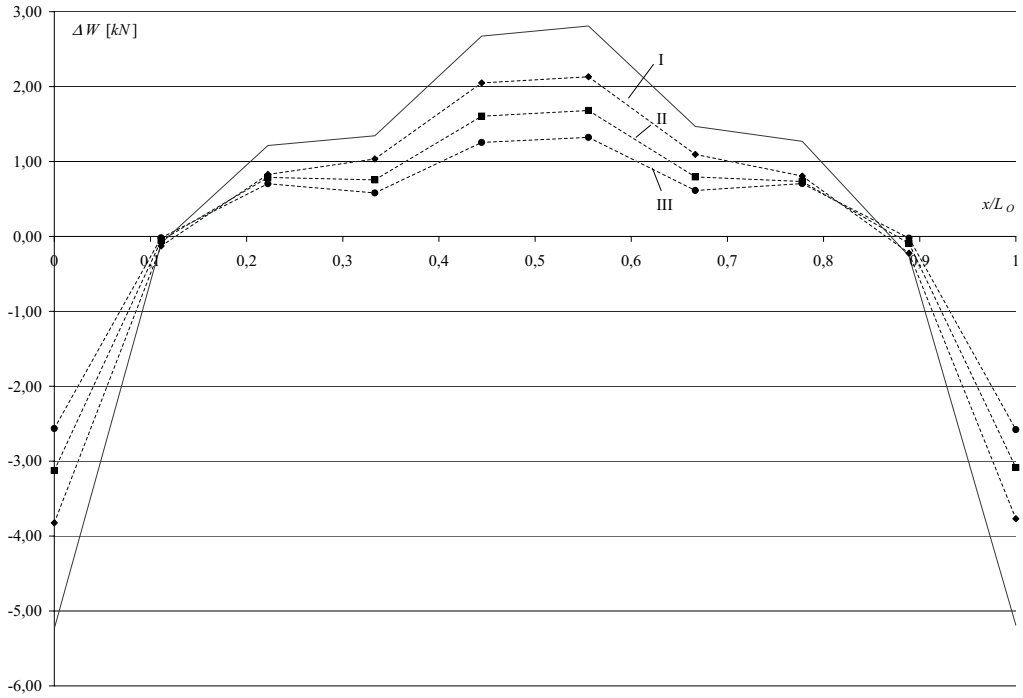


Bild 7.26: Änderungen der Windrispenkraft ΔW für variable Steifigkeiten der Primärsysteme (I- $h = 1250mm$, II- $h = 1500mm$ und III- $h = 2000mm$) bei einer Verbandssteifigkeit von 10%

Diese Verteilung der Ersatzlastgruppe, die näherungsweise der in Bild 6.3a dargestellten entspricht, wird vereinfachend durch eine konstante Funktion angenähert. Tabelle 7.9 enthält die Gegenüberstellung der mittels FEM ermittelten Werte und der Abschätzungen nach Gleichung 7.12 für verschiedene Steifigkeiten der Primärsysteme und der Verbandsbinder als Teil des Sekundärsystems. Zur besseren Vergleichbarkeit der Ergebnisse des Abschnitts 7.5.1 mit den Ergebnissen dieses Abschnitts werden im folgenden nur die Ersatzlasten $Q_e = q_e \frac{L_O}{2}$ nach Gleichung 7.12 angegeben.

Tabelle 7.9 zeigt, dass mit der Abschätzung nach Gleichung 7.12 unter Verwendung der Schubsteifigkeit des Verbandsbinders die Beanspruchung des Sekundärsystems

Tabelle 7.9: $Q_{e,FEM}$ für Imperfektionsform 1 und Abschätzung nach Gleichung 7.12

	Bild 7.25 Verbandssteifigkeit			Bild 7.26 Binderhöhe		
$Q_e[kN]$	I	II	III	I	II	III
FEM	5,09	4,81	4,64	5,09	4,35	3,41
Gleichung 7.12	4,99	3,71	3,39	4,99	3,95	2,85

nur für geringe Steifigkeiten richtig bestimmt werden kann. Bei zunehmender Steifigkeit des Verbandsbinders oder des Primärsystems kommt es zu einer Überschätzung der Steifigkeit des Sekundärsystems. Die Größe der Lasten Q_e hängt offensichtlich nicht so stark von der Steifigkeit des Verbandsbinders ab. Daher wird im folgenden zur Ermittlung der Steifigkeit des Sekundärsystems die Schubsteifigkeit der Windrispe W verwendet. Die Schubsteifigkeit kann analog nach Gleichung 7.13 ermittelt werden, wenn für den Winkel β_F der Neigungswinkel und für die Steifigkeit EA_F die Dehnsteifigkeit der Windrispe W eingesetzt werden.

Die Schubsteifigkeit für die Dachgeometrie, $h = 1250mm$, $mb = 7500mm$ und $L = 10000mm$, und Dehnsteifigkeit $EA = 0,6 \cdot 25,2kN = 15,1kN$ der Windrispe W ist $F_{Schub} = 5,8MN$. Die Auswirkung der Berücksichtigung der Schubsteifigkeit der Windrispe in Gleichung 7.12 wird zunächst für die Imperfektionsform 2 gezeigt. Bei dieser Imperfektionsform wird der Einfluss der globalen Imperfektion a priori ausgeschlossen.

Tabelle 7.10: Q_e aus Berechnung mit FEM für Imperfektionsform 2 und Abschätzung nach Gleichung 7.12

	Verbandssteifigkeit		
$Q_e[kN]$	10%	30%	100%
FEM	3,42	3,32	3,25
Gleichung 7.12 α_V Verband	4,57	3,48	3,19
Gleichung 7.12 α_V Rispe	3,36	3,34	3,32

Die Ergebnisse in Tabelle 7.10 zeigen für geringer werdende Verbandssteifigkeiten eine größere Abweichung der Ersatzlast nach Gleichung 7.12 mit α_V des Verbandes von den numerischen Simulationen. Mit Berücksichtigung der Schubsteifigkeit der Windrispe W bei der Abschätzung kann das Tragverhalten offensichtlich besser berücksichtigt werden.

Wird jedoch die Windrispe zusätzlich durch Auswirkungen der globalen Imperfektionen, wie dies in Abschnitt 7.5.1 beschrieben ist, beansprucht, ist eine einfache

Abschätzung nur noch bedingt möglich.

Die Beanspruchung der Windrispe W infolge der Auswirkungen der globalen Imperfektion I_φ wird im folgenden abgeschätzt. Dazu wird die zur Ermittlung der α-Werte verwendete Normalkraft N durch

$$N = N\left(1 + \frac{1}{\sqrt{h}}\frac{Q_\varphi}{Q_e}\right)$$

ersetzt. Für den Quotient $\frac{Q_\varphi}{Q_e}$ werden dabei zunächst die Werte aus der FEM-Simulation verwendet. Der Quotient $\frac{1}{\sqrt{h}}$ bleibt hierbei unberücksichtigt. In einem weiteren Schritt ist der Quotient $\frac{Q_\varphi}{Q_e}$ mit den Ergebnissen der Gleichungen 7.6 für Q_φ und 7.12 mit α_V der Rispe, siehe Tabelle 7.10, für Q_e zu ermitteln. Tabelle 7.11 enthält die Werte der FEM-Simulation und die Abschätzungen der Gleichung 7.12 mittels Rispensteifigkeit. Die Werte in Spalte 2 gelten für das System ohne Verbandsbinder.

Tabelle 7.11: Q_e aus Berechnung mit FEM für Imperfektionsform 1 und Abschätzung nach den Gleichungen 7.12 und 7.14

		Bild 7.25 Verbandssteifigkeit				Bild 7.26 Binderhöhe		
2	$Q_e[kN]$	- - -	I	II	III	I	II	III
3	FEM	5,23	5,09	4,81	4,64	5,09	4,35	3,41
4	Gleichung 7.12 $\alpha_{V,FEM}$	5,66	5,70	5,73	5,74	5,70	4,88	3,92
5	Gleichung 7.12 α_V	6,47	6,39	6,25	6,22	6,23	5,26	4,12
6	Gleichung 7.14	7,11	7,04	6,99	6,95	7,04	5,96	4,64

Zum Vergleich: Nach der Norm EDIN 1052 darf die Ersatzlast Q_e nach folgender Formel ermittelt werden:

$$Q_e = q_e \frac{L_O}{2} \tag{7.14}$$

$$\text{mit } q_e = \frac{mN}{30L_O}.$$

Die Ergebnisse nach Gleichung 7.14 sind ebenfalls in Tabelle 7.11 eingetragen. Abschließend werden in Bild 7.27 für System 3 mit $h = 1250mm$ bis $h = 3000mm$ und einer Verbandssteifigkeit von 10% die Ergebnisse für $Q_{e,FEM}$ und der verschiedenen Abschätzungen gegenübergestellt.

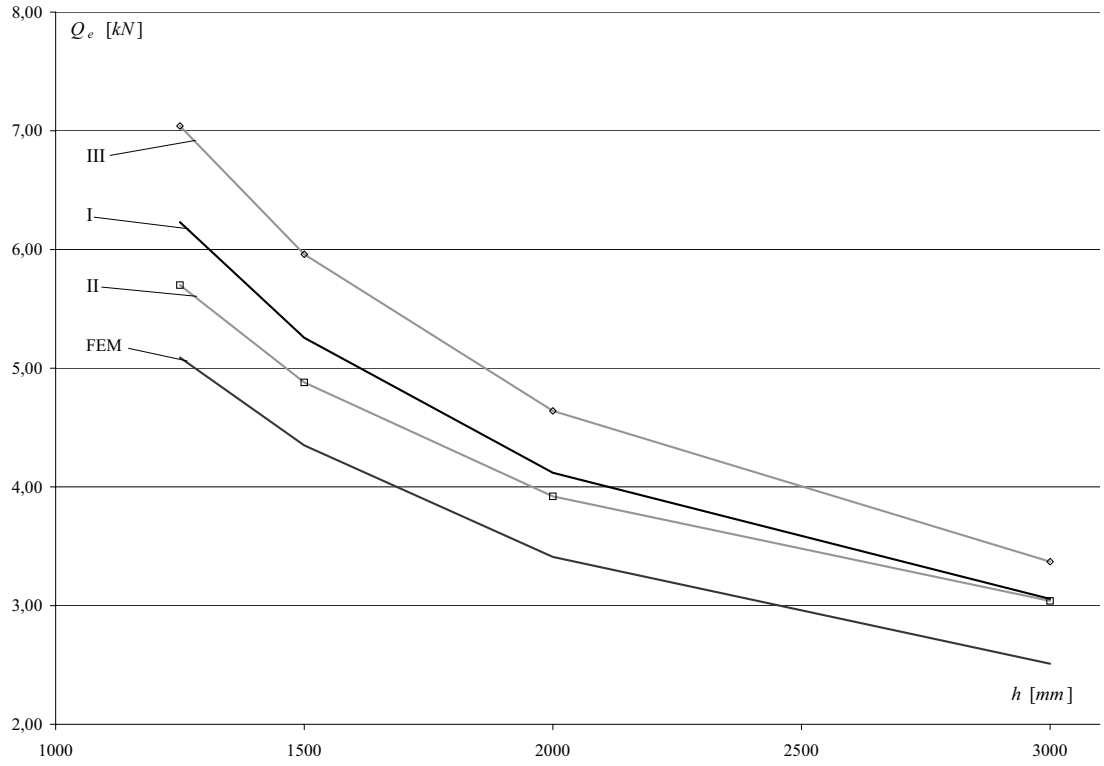


Bild 7.27: $Q_{e,FEM}$ und Abschätzungen nach den Gleichungen 7.12 und 7.14 bei einer Verbandssteifigkeit von 10%

I Gleichung 7.12 mit α_V

II Gleichung 7.12 mit $\alpha_{V,FEM}$

III Gleichung 7.14

7.5.3 Auswertung

Die durchgeführten Untersuchungen haben gezeigt, dass erst ein vollständiges räumliches Sekundärsystem in der Lage ist, die seitliche Halterung der Primärsysteme zu übernehmen. Besondere Bedeutung kommt dabei der ordnungsgemäßen Ausführung der Windrispe zu, da die Berechnungen in Abschnitt 7.4.2 gezeigt haben, dass Systeme mit weichen Verbänden ohne die große Diagonale nicht in der Lage sind, die Gebrauchslasten aufzunehmen.

Wird die Windrispe an jedem Obergurt ausreichend angeschlossen, kann sie zur Aufnahme der aus der Vorkrümmung resultierenden Beanspruchungen herangezogen werden. In jedem Falle ist aber eine Befestigung der Windrispe an der Traufe und am First für die aus der globalen Imperfektion resultierende Beanspruchung

erforderlich. Hierbei sind natürlich mögliche Kombinationen mit anderen Einwirkungen zu berücksichtigen.

Die Abschätzungen in den Abschnitten 7.5.1 und 7.5.2 zeigen deutlich die Komplexität der Problematik und die damit verbundenen Schwierigkeiten einer einfachen und sicheren Beschreibung des geometrisch nichtlinearen Tragverhaltens räumlicher Stabwerke, speziell der Satteldachbinder.

Die in Kapitel 5 eingeführte Aufteilung der Imperfektionen in globale und lokale Anteile wird bei der Ermittlung der Ersatzlastgruppen ebenfalls verwendet. Für die globale Imperfektion führt diese Betrachtung auf eine Abschätzung der Ersatzlast, die das räumliche Tragverhalten, ausgedrückt durch die Durchschlaglast und die Kipplast, berücksichtigt. Bei der Ermittlung der Ersatzlastgruppe für die lokale Imperfektion wird auf eine aus der Literatur bekannte Beschreibung zurückgegriffen. Die Auswertungen, speziell für Imperfektionsform 2, zeigen, dass die lokalen Imperfektionen im wesentlichen Beanspruchungen in einer Ebene bewirken, so wie dies in Bild 6.5 schon angedeutet wird.

Es wird daher für die Bemessung des Sekundärsystems von Satteldachkonstruktionen in Nagelplattenbauart vorgeschlagen:

- Bemessung der Windrispen W für die aus der Summe $Q_\varphi + Q_e$ mit Q_φ nach Gleichung 7.6 und $Q_e = q_e \frac{L_O}{2}$ nach Gleichung 7.12, mit α_V der Rispe, resultierende Kraft, wobei die Windrispe an jedem Obergurt für ΔW und an Traufe und First für die aus $Q_\varphi + Q_e$ resultierende Kraft anzuschließen ist. Hierbei ist zu beachten, dass Q_φ global anzusetzen ist, d.h. je Dachhälfte an Traufe und First $\frac{1}{2}Q_\varphi$. Für Q_e hingegen ist ein lokaler Ansatz zu wählen, d.h. je Dachhälfte an Traufe und First Q_e.

- Bemessung der parallelgurtigen Verbände für eine konstante Querkraft Q_e nach Gleichung 7.12 mit α_V des Verbandes unter Berücksichtigung der Nachgiebigkeit der Verbindungsmittel.

Die in den Bemessungsvorschlägen verwendeten Ersatzlasten Q_φ und Q_e sind im Sinne des Abschnittes 5.3 ungünstig kombiniert. Günstige Auswirkungen dürfen nicht berücksichtigt werden.

Die Untersuchungen zeigen, dass eine Bemessung mit Hilfe der Ersatzlast nach Gleichung 7.14 das räumliche Tragverhalten zwar unzureichend berücksichtigt, die Abschätzung der Auswirkungen lokaler Imperfektionen jedoch weiterhin mit dieser Ersatzlast erfolgen kann. Es ist darüber hinaus erforderlich, die Auswirkungen der globalen Imperfektionen bei der Bemessung des Sekundärsystems zu berücksichtigen.

Zur Gewährleistung der Funktion des Sekundärsystems ist es unbedingt notwendig, die imperfekten Primärsysteme druck- und zugfest mit den einzelnen Teilen des

Sekundärsystems zu verbinden. Dazu zählen die Anschlüsse der Pfetten am First, im Feld und an der Traufe. An der Traufe können die Kräfte in y-Richtung alternativ auch direkt in die Unterkonstruktion eingeleitet werden.

Mit den angegebenen Ersatzlasten für die globalen und lokalen Imperfektionen ist es möglich, das räumliche Tragverhalten der Satteldachbinder bei den in der Praxis üblicherweise durchgeführten ebenen und linearen Berechnungen zu berücksichtigen. Die Darstellungen in den Abschnitten 7.5.1 und 7.5.2 zeigen, dass für bestimmte Dachgeometrien mit dem bisherigen Normansatz keine ausreichende Sicherheit gewährleistet werden kann. Es ist daher zwingend erforderlich, diese Lücke umgehend zu schließen und die Anwendbarkeit der Ersatzlastgruppen auf andere Dachgeometrien zu überprüfen.

Kapitel 8

Zusammenfassung und Ausblick

Nach einer Einführung in die Grundlagen der Kontinuumsmechanik in Kapitel 1, bei der besonders auf die Darstellung der unterschiedlichen Konfigurationen und der zugehörigen Abbildungen eingegangen wird, erfolgt die Reduktion auf ein einparametriges COSSERATkontinuum in Kapitel 2. Abschließend werden in diesem Kapitel die linearisierten Stabgleichungen einer allgemeinen Stabtheorie angegeben. Kapitel 3 dient zur anschaulichen Darstellung einer möglichen Einordnung der im Ingenieurwesen bekannten Theorien. Besonderes Augenmerk wird dabei auf das Verhalten einfacher Stabwerke im überkritischen Bereich gelegt.

In Kapitel 4 werden, ausgehend vom elastischen Potential, die zur Beschreibung der Gleichgewichtslagen erforderlichen Variationen aufgeführt. Der Beschreibung der verwendeten finiten Elemente und der Überprüfung der zugrunde gelegten Theorie schließen sich die Methoden zur Eigenwertanalyse und zur nichtlinearen Berechnung an.

Kapitel 5 enthält die Ergebnisse einer statistischen Untersuchung zur Ermittlung der geometrischen Imperfektionen an schlanken Stabtragwerken, insbesondere an Satteldachkonstruktionen in Nagelplattenbauart. Dabei sind neben der Definition der globalen und lokalen Imperfektionen die Messungen und die daraus resultierende Verteilungshypothese Gegenstand der Betrachtungen. Den Abschluss von Kapitel 5 bilden Bemessungsvorschläge für die Praxis und die Einordnung der Imperfektionen in das semiprobabilistische Sicherheitskonzept.

Kapitel 6 beschreibt zwei Interpretationen von Ersatzlastgruppen, zum einen den Ersatz von geometrischen Imperfektionen und zum anderen den Ersatz von geometrischen Imperfektionen einschließlich ihrer Auswirkungen bei einer geometrisch nichtlinearen Berechnung.

Kapitel 7 gibt die Ergebnisse der Eigenwertanalysen und geometrisch nichtlinearen Berechnungen für verschiedene Stabwerke an. Ziel dieser Untersuchungen ist die

Ermittlung von Ersatzlastgruppen zur einfachen linearen Abschätzung des nichtlinearen Tragverhaltens geometrisch imperfekter räumlicher Stabwerke. Die für die Berechnung der Ersatzlastgruppen erforderlichen Eingangsgrößen sind Bestandteil der linearen Stabwerksbemessungen oder werden in Gleichungen zur Verfügung gestellt.

Insbesondere die Darstellungen in Kapitel 7 Abschnitt 7.5.1 und Abschnitt 7.5.2 zeigen die Komplexität der linearen Abschätzung des geometrisch nichtlinearen Tragverhaltens räumlicher Stabwerke. Es gelingt bei diesen Auswertungen die verschiedenen Einflüsse auf die Beanspruchungen des Sekundärsystems herauszuarbeiten, jedoch bleibt die Notwendigkeit der Erweiterung auf eine breitere Vielzahl von Konstruktionen.

Dazu zählen Nagelplattenkonstruktionen mit größeren Spannweiten, anderen Füllstabanordnungen und natürlich auch unsymmetrische Systeme. Weiterhin sind Stabwerke mit Auskragungen, Pultdach- und Trapezdachbinder mögliche Anwendungsgebiete.

In einem nächsten Schritt sind dann auch Variationen des Sekundärsystems erforderlich. Die zur Verfügung gestellten Formeln für die linearen Abschätzungen sind keineswegs an Nagelplattenkonstruktionen gebunden, vielmehr können die gewonnenen Ergebnisse auch auf andere Systeme erweitert werden. Dazu zählen alle Arten von Stabwerken sowohl in Holz- als auch in Stahlbauart.

Die Aufteilung der Beanspruchungen des Sekundärsystems in globale und lokale Anteile mit gegenseitiger Beeinflussung ermöglicht es auch andere Konzepte für Sekundärsysteme, z.B. Dachschalung, Trapezbleche oder Werkstoffplatten, einzusetzen und zu bemessen.

Anhang

Anhang A

Mathematische Grundlagen

A.1 Lineare Abbildungen

(Fischer [15])
Alle Darstellungen, Beschreibungen und Argumentationen werden nur für die reellen Zahlen angegeben. Es genügt daher den Körper der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ und Vektorräume über diesem Körper einzuführen. Zur Definition eines Körpers, zugehöriger Vektorräume und deren Eigenschaften sei auf oben genannte Literatur verwiesen.

Seien V und W Vektorräume über dem Körper $\mathbb{R}$. Die Abbildung

$$f : \begin{cases} V & \to & W \\ \vec{x} & \mapsto & f(\vec{x}) \end{cases} \tag{A.1}$$

heißt linear oder Homomorphismus, falls

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y) \tag{A.2}$$

für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und alle $x, y \in V$. Eine Verschärfung des Begriffs Homomorphismus führt zu folgenden Bezeichnungen. Die lineare Abbildung $f : V \longrightarrow W$ heißt

Isomorphismus, falls f bijektiv ist,

Homöomorphismus, falls f bijektiv und f, f^{-1} stetig sind,

Endomorphismus, falls $V = W$,

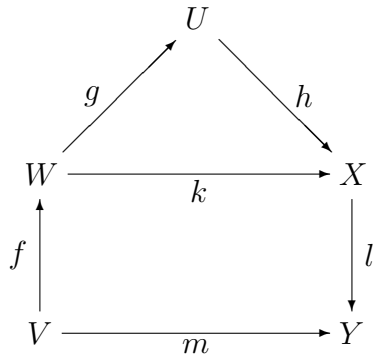
Automorphismus, falls $V = W$ und f bijektiv ist.

Seien $V = \mathbb{R}^n$ und $W = \mathbb{R}^m$ dann existiert zu jeder linearen Abbildung $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ genau eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, sodass

$$f(x) = Ax \tag{A.3}$$

für alle Spaltenvektoren $x \in \mathbb{R}^n$.

Lineare Abbildungen können auch mehrfach hintereinandergeschaltet oder Hintereinanderschaltungen zur Vereinfachung zusammengefaßt werden, was zum Teil zu recht komplexen Strukturen führen kann. Zur übersichtlichen Darstellung solcher Verknüpfungen werden im Allgemeinen kommutative Diagramme der Form



verwendet. Obiges Diagramm zeigt die Abbildung des $\mathbb{R}$ Vektorraums V in den $\mathbb{R}$ Vektorraum Y als Hintereinanderschaltung mehrerer linearer Abbildungen

$$m : \left\{ \begin{array}{lcl} V & \rightarrow & W \rightarrow X \rightarrow Y \\ \vec{x} & \mapsto & m(\vec{x}) = (l \circ k \circ f)(\vec{x}) \end{array} \right. \tag{A.4}$$

oder

$$m : \left\{ \begin{array}{lcl} V & \rightarrow & W \rightarrow U \rightarrow X \rightarrow Y \\ \vec{x} & \mapsto & m(\vec{x}) = (l \circ h \circ g \circ f)(\vec{x}) \end{array} \right. , \tag{A.5}$$

wobei die lineare Abbildung $k = g \circ h$ wiederum eine Hintereinanderschaltung ist.

A.2 Dualität

(Bertram [5] und Fischer [15])
Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$, dann heißt

$$V^* := Hom(V, \mathbb{R}) = \{\varphi : \ \mathrm{V} \rightarrow \mathbb{R} : \varphi \ \ \text{linear}\} \tag{A.6}$$

der Dualraum von V. Die Elemente des Dualraums V^* werden als Linearformen auf V bezeichnet. Seien $B = (x_1, ..., x_n)$ und $B^* = (y^1, ..., y^n)$ zwei Basen der Vektorräume V und V^*. Ist das innere Produkt oder Skalarprodukt

$$\langle x_i, y^j \rangle = x_i \cdot y^j = \delta_i{}^j := \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{für } i = j \\ 0 & \text{sonst,} \end{array} \right. \tag{A.7}$$

dann werden diese Basen dual genannt.

A.3 Bilinearformen

(Fischer [15])
Sei V ein Vektorraum über dem Körper $\mathbb{R}$. Eine Abbildung

$$f : \begin{cases} V \times V & \to & \mathbb{R} \\ (\vec{x}, \vec{y}) & \mapsto & f(\vec{x}, \vec{y}) \end{cases} \tag{A.8}$$

heißt Bilinearform, wenn f in beiden Argumenten linear ist. D.h. $f(\cdot, \vec{y}) : V \to \mathbb{R}$, $\vec{x} \mapsto f(\vec{x}, \vec{y})$ und $f(\vec{y}, \cdot) : V \to \mathbb{R}$, $\vec{x} \mapsto f(\vec{y}, \vec{x})$ sind lineare Abbildungen für jedes $\vec{y} \in V$. Die Bilinearform ist symmetrisch, falls $f(\vec{x}, \vec{y}) = f(\vec{y}, \vec{x})$ für alle $\vec{x}, \vec{y} \in V$ gilt.

Im folgenden wird der Begriff der Bilinearform etwas erweitert. Seien V und W Vektorräume über dem Körper $\mathbb{R}$ und

$$f : \begin{cases} V \times W & \to & \mathbb{R} \\ (\vec{x}, \vec{y}) & \mapsto & f(\vec{x}, \vec{y}) \end{cases} \tag{A.9}$$

eine Abbildung. Für festes $\vec{x} \in V$ und $\vec{y} \in W$ werden die Abbildungen $f_{\vec{x}} : W \to \mathbb{R}$, $\vec{y} \mapsto f(\vec{x}, \vec{y})$ und $f_{\vec{y}} : V \to \mathbb{R}$, $\vec{x} \mapsto f(\vec{x}, \vec{y})$ definiert. f ist bilinear, falls $f_{\vec{x}}$ und $f_{\vec{y}}$ für alle $\vec{x} \in V$ und $\vec{y} \in W$ linear sind.

A.4 Tensoren

(Bertram [5], Fischer [15] und Klingbeil [31])
Es folgt eine weitere Verallgemeinerung der Bilinearform. Seien V, W und U Vektorräume über dem Körper $\mathbb{R}$. Eine Abbildung

$$\xi : \begin{cases} V \times W & \to & U \\ (\vec{x}, \vec{y}) & \mapsto & \xi(\vec{x}, \vec{y}) \end{cases} \tag{A.10}$$

heißt bilinear, wenn die Abbildungen $\xi_{\vec{x}} : W \to U$, $\vec{y} \mapsto \xi(\vec{x}, \vec{y})$ und $\xi_{\vec{y}} : V \to U$, $\vec{x} \mapsto \xi(\vec{x}, \vec{y})$ für festes $\vec{x} \in V$ und $\vec{y} \in W$ linear sind. Seien $(x_i)_{i \in I}$ und $(y_j)_{j \in J}$ Basen von V und W, so läßt sich jede beliebig vorgegebene Familie $(z_{ij})_{(i,j) \in I \times J}$ durch genau eine bilineare Abbildung

$$\xi : V \times W \to U \text{ mit } \xi(\vec{x}, \vec{y}) = z_{ij} \quad \forall (i,j) \in I \times J \tag{A.11}$$

darstellen. Wird nun die Familie $(z_{ij})_{(i,j) \in I \times J}$ so gewählt, daß die z_{ij} eine Basis des Vektorraums U sind, so gibt es einen $\mathbb{R}$ Vektorraum $V \otimes W$ und eine bilineare Abbildung

$$\eta : V \times W \to V \otimes W \tag{A.12}$$

mit folgender Eigenschaft. Zu jedem $\mathbb{R}$ Vektorraum U und einer linearen Abbildung

$$\xi : V \times W \to U \tag{A.13}$$

existiert genau eine lineare Abbildung

$$\xi_{\otimes} : V \otimes W \to U \tag{A.14}$$

mit $\xi = \xi_{\otimes} \circ \eta$. $V \otimes W$ heißt das Tensorprodukt von V und W über $\mathbb{R}$. Die Elemente von $V \otimes W$ werden Tensoren genannt.

Soeben wurden Bilinearformen beschrieben. Für die Arbeit mit Tensoren ist es aber erforderlich auch multilineare Abbildungen zur Verfügung zu haben. Daher wird nun allgemein eine Abbildung

$$\xi : V_1 \times ... \times V_k \to W \tag{A.15}$$

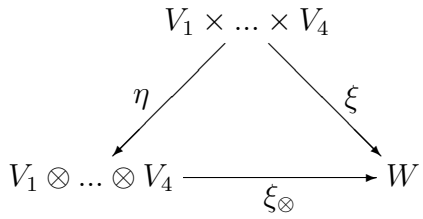
definiert, die multilinear heißt, wenn für jedes $i \in \{1, ..., k\}$ und fest gewählte $x_j \in V_j (j = 1, ..., i-1, i+1, ..., k)$ die Abbildung

$$V_i \to W, (\vec{x}) \mapsto \xi(\vec{x}_1, ..., \vec{x}_{i-1}, \vec{x}, \vec{x}_{i+1}, ...\vec{x}_k) \tag{A.16}$$

k-linear ist. Analog zu Gleichung A.12 können dann $\mathbb{R}$ Vektorräume $V_1 \otimes ... \otimes V_k$ mit einer multilinearen Abbildung

$$\eta : \left\{ \begin{array}{lcl} V_1 \times ... \times V_k & \to & V_1 \otimes ... \otimes V_k \\ (\vec{x}_1, ..., \vec{x}_k) & \mapsto & \vec{x}_1 \otimes ... \otimes \vec{x}_k \end{array} \right. \tag{A.17}$$

konstruiert werden. Für die Beschreibungen im Rahmen dieser Arbeit, es sei hier auf den Elastizitätstensor in Abschnitt 1.5.1 hingewiesen, genügt es, tetralineare Abbildungen zu betrachten. Die in den Gleichungen A.13 und A.14 beschriebene besondere Eigenschaft der in Gleichung A.12 angegebenen Abbildung wird nun für den tetralinearen Fall im folgenden kommutativen Diagramm dargestellt.



Aufgrund der Tetralinearität der Abbildung η werden die Elemente des $\mathbb{R}$ Vektorraums $V_1 \otimes ... \otimes V_4$, die Tensoren 4. Stufe, auch als Tetraden bezeichnet.

Mit Hilfe der in Anhang A.2 eingeführten dualen Vektorräume lässt sich nun für einen $\mathbb{R}$ Vektorraum V ein Vektorraum T in der Form

$$T := \underbrace{V \otimes ... \otimes V}_{p-mal} \otimes \underbrace{V^* \otimes ... \otimes V^*}_{q-mal} \tag{A.18}$$

erklären. Die Elemente von T werden als p-fach *kontravariante* und q-fach *kovariante* Tensoren bezeichnet. Damit kann jeder Tensor eindeutig als

$$\sum_{i_1,...,i_p,j_1,...,j_q} a^{i_1...i_p}{}_{j_1...j_q}\ v_{i_1} \otimes ... \otimes v_{i_p} \otimes v^{j_1} \otimes ... \otimes v^{j_q} \tag{A.19}$$

mit $i_1, ..., i_p,\ j_1, ..., j_q \in \{1, ..., n\}$ und $a^{i_1...i_p}{}_{j_1...j_q} \in \mathbb{R}$ dargestellt werden.

A.4.1 Tensoralgebra

(Altenbach [1], Bronstein [7], Klingbeil [31] und Teichmann [57])
In Anhang A.4 wurden die Tensoren abstrakt mit der Einschränkung auf 4 Dimensionen eingeführt. Ein Tensor 0. Stufe, d.h. der Dimension 0, wird auch als Skalar bezeichnet. Weiter ist ein Tensor 1. Stufe ein Vektor, 2. Stufe eine Dyade und 4. Stufe eine Tetrade. Es existieren zwei Tensoren die sich durch ihre speziellen Eigenschaften auszeichnen. Das sind zum einen ein Tensor 2. Stufe, der Deltatensor

$$\delta_{ij} = \delta^{ij} = \delta^i{}_j = \delta_i{}^j = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{A.20}$$

und zum anderen ein Tensor 3. Stufe, der Epsilontensor

$$\varepsilon_{ijk} = \vec{e}_i(\vec{e}_j \times \vec{e}_k) = \begin{cases} 1 & \text{falls } i,j,k \text{ zyklisch} \\ -1 & \text{falls } i,j,k \text{ antizyklisch} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \tag{A.21}$$

Für Tensoren werden die folgenden Verknüpfungen definiert:

Skalarprodukte

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a^i\vec{e}_i) \cdot (b^j\vec{e}_j) = a^i b^j(\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j) = a^i b^j \delta_{ij} = a^i b^j \tag{A.22}$$

Vektorprodukte

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a^i\vec{e}_i) \times (b^j\vec{e}_j) = a^i b^j(\vec{e}_i \times \vec{e}_j) = a^i b^j \varepsilon_{ij}{}^k \vec{e}_k \tag{A.23}$$

Dyadische Produkte

$$\vec{a} \otimes \vec{b} = (a^i\vec{e}_i) \otimes (b^j\vec{e}_j) = a^i b^j(\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j) = A^{ij}(\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j). \tag{A.24}$$

Kovariante und kontravariante Basis

Seien $\vec{g}_i$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ und $\vec{g}^i$ die zugehörige duale Basis, siehe auch Anhang A.2, dann werden $\vec{g}_i$ als kovariante und $\vec{g}^i$ als kontravariante Basen bezeichnet. Die Verknüpfung dieser beiden Basen liefert den bekannten Deltatensor δ_i^j. Werden die

Vektoren jeder Basis skalar mit Vektoren der gleichen Basis multipliziert ergeben sich die Metrikkoeffizienten. Diese werden in Abhängigkeit der zugehörigen Basis in kovariante

$$g_{ij} = \vec{g}_i \cdot \vec{g}_j \tag{A.25}$$

und kontravariante

$$g^{ij} = \vec{g}^i \cdot \vec{g}^j \tag{A.26}$$

Metrikkoeffizienten unterschieden. Mit diesen Koeffizienten können nun die Basen ineinander überführt werden, die kovariante in die kontravariante

$$\vec{g}^i = g^{ij}\vec{g}_j \tag{A.27}$$

und umgekehrt die kontravariante in die kovariante Basis

$$\vec{g}_i = g_{ij}\vec{g}^j. \tag{A.28}$$

Dabei besteht folgender Zusammenhang zwischen den Metrikkoeffizienten

$$g^{ij}g_{jk} = \delta^i{}_k. \tag{A.29}$$

Werden den Metrikkoeffizienten und dem Deltatensor aus Gleichung A.29 die Matrizen $\mathbf{M} := g^{ij}$, $\mathbf{M}^* := g_{jk}$ und $\mathbf{I} := \delta^i{}_k$ zugeordnet, dann wird der Zusammenhang der Metrikkoeffizienten,

$$\mathbf{M}\mathbf{M}^* = \mathbf{M}\mathbf{M}^{-1} = \mathbf{I} \tag{A.30}$$

die kovarianten können durch Inversion der Matrix der kontravarianten berechnet werden, direkt sichtbar.

A.4.2 Tensoranalysis

(Altenbach [1], Bronstein [7], Klingbeil [31] und Teichmann [57])
Die Differentiations- und Integrationsregeln für Tensoren lassen sich auf die von Skalaren zurückführen. Dazu betrachten wir einen Tensor 1. Stufe den Ortsvektor $\vec{r}$ als Funktion der Zeit t. Beziehen wir diesen Vektor auf ein zeitinvariantes orthonormales Bezugssystem mit den ortsunabhängigen Einheitsvektoren $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, dann kann für den Differentialquotienten $\frac{d\vec{r}}{dt}$ geschrieben werden:

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{r}}{dt} &= \lim_{\triangle t\to 0}\frac{\triangle\vec{r}}{\triangle t} = \lim_{\triangle t\to 0}\frac{\triangle(r^1\vec{e}_1 + r^2\vec{e}_2 + r^3\vec{e}_3)}{\triangle t} = \\ &= \vec{e}_1\lim_{\triangle t\to 0}\frac{\triangle r^1}{\triangle t} + \vec{e}_2\lim_{\triangle t\to 0}\frac{\triangle r^2}{\triangle t} + \vec{e}_3\lim_{\triangle t\to 0}\frac{\triangle r^3}{\triangle t} = \\ &= \vec{e}_1\frac{dr^1}{dt} + \vec{e}_2\frac{dr^2}{dt} + \vec{e}_3\frac{dr^3}{dt}.\end{aligned} \tag{A.31}$$

Analog zu Gleichung A.31 können auch die folgenden tensorwertigen Funktionen einer skalaren Variablen in ihre Komponenten zerlegt werden:

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \mathbf{R}(t) \\ \frac{d\mathbf{R}(t)}{dt} &= \lim_{\triangle t \to 0} \frac{\mathbf{R}(t+\triangle t) - \mathbf{R}(t)}{\triangle t} \\ \frac{d}{dt} \int \mathbf{R}(t) dt &= \mathbf{R}(t). \end{aligned} \tag{A.32}$$

Nun soll noch ein wichtiger Begriff der Tensoranalysis angegeben werden. Der Nablaoperator ∇ ist als

$$\nabla = \vec{e}^{\,i} \frac{\partial(\ldots)}{\partial x_i} = (\ldots)_{,i} \vec{e}^{\,i} \tag{A.33}$$

definiert und ist auch als Gradient bekannt. Die Anwendung dieses Operators auf einen Tensor $n$ter Stufe erzeugt einen Tensor $(n+1)$ter Stufe.

Die Anwendung auf ein Skalar liefert einen Vektor

$$\text{grad } a = \nabla a = \vec{e}^{\,i} a_{,i} = a_{,i} \vec{e}^{\,i}, \tag{A.34}$$

auf einen Vektor einen Tensor 2. Stufe

$$\text{grad } \vec{a} = \nabla \vec{a} = \vec{e}^{\,i} \vec{a}_{,i} = \vec{e}^{\,i} a_{j,i} \vec{e}^{\,j} = a_{j,i} \vec{e}^{\,i} \vec{e}^{\,j} \tag{A.35}$$

und auf einen Tensor 2. Stufe einen Tensor 3. Stufe

$$\text{grad } \mathbf{A} = \nabla \mathbf{A} = \vec{e}^{\,i} \mathbf{A}_{,i} = \vec{e}^{\,i} A_{jk,i} \vec{e}^{\,j} \vec{e}^{\,k} = \vec{e}^{\,i} A_{jk,i} \vec{e}^{\,j} \vec{e}^{\,k}. \tag{A.36}$$

Weiterhin sind die Verknüpfungen nach Gleichung A.22, die Divergenz

$$\text{div } \vec{a} = \nabla \cdot \vec{a} = \frac{\partial a_j}{\partial x_i} \vec{e}^{\,i} \cdot \vec{e}^{\,j} = a_{j,i} \delta^{ij} = a_{i,i} \tag{A.37}$$

und nach Gleichung A.23, die Rotation

$$\text{rot } \vec{a} = \nabla \times \vec{a} = \frac{\partial a_j}{\partial x_i} \vec{e}^{\,i} \times \vec{e}^{\,j} = a_{j,i} \varepsilon^{ijk} \vec{e}^{\,k} \tag{A.38}$$

möglich.

A.5 Bewegungen des $\mathbb{R}^3$

Die Geometrie des $\mathbb{R}^3$ ist durch seine Metrik

$$d(\vec{x}, \vec{y}) = \sqrt{\sum (x_i - y_i)^2} \tag{A.39}$$

eindeutig bestimmt. Eine Bewegung des $\mathbb{R}^3$ wird allgemein durch die Abbildung

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ \vec{x} & \mapsto & \varphi(\vec{x}) = \mathbf{A}\vec{x} + \vec{b} \end{cases} \tag{A.40}$$

vermittelt mit $A \in O_3\mathbb{R}$ und $\vec{b} \in \mathbb{R}^3$. Nach Abbildung A.1 lassen sich die Bewegungen in orientierungstreue und orientierungsumkehrende Abbildungen unterscheiden. Diese Einteilung erfolgt sehr einfach durch Ermittlung der Determinante der Abbildungsmatrix $\mathbf{A}$ und die entsprechende Zuordnung in die spezielle orthogonale Gruppe $SO_3\mathbb{R}$ bzw. die allgemeine orthogonale Gruppe $O_3\mathbb{R}$.

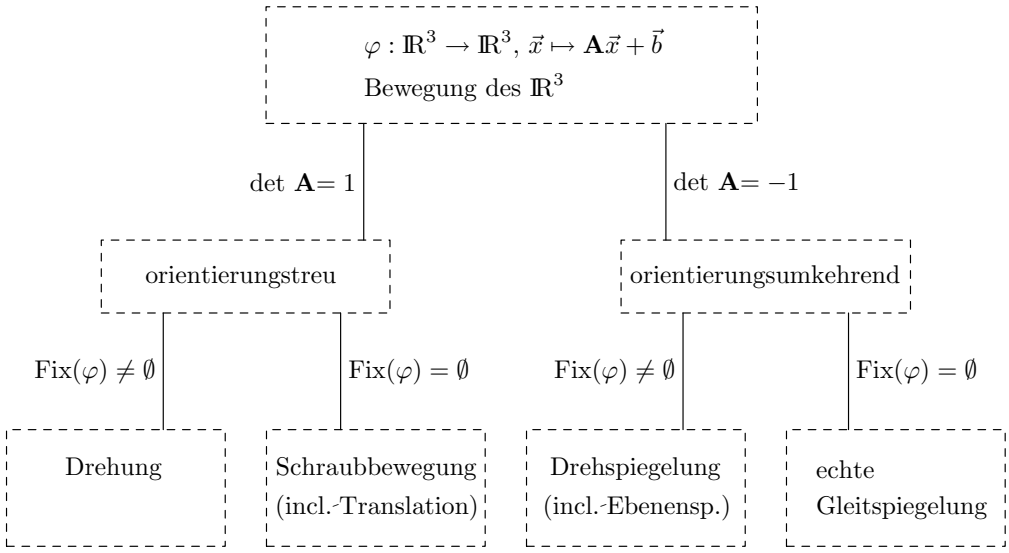


Bild A.1: Bewegungen des $\mathbb{R}^3$

Da diese Arbeit nur Bewegungen fester materieller Körper behandelt, können orientierungsumkehrende Abbildungen ausgeschlossen werden. Die verbleibenden Abbildungen vermitteln eine reine Drehung bei Vorhandensein einer Fixpunktmenge bzw. eine Schraubbewegung wenn es keine Fixpunkte gibt. Die Schraubbewegungen enthalten dabei auch die reinen Translationen wenn $\mathbf{A} = \mathbf{I}$.

A.5.1 Drehung im $\mathbb{R}^3$

(Lagally [34], Meyberg/ Vachenauer [41] und Rankin/ Brogan [50])
Nach Abbildung A.40 kann eine reine Drehung in der Form

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ \vec{\Xi} & \mapsto & \varphi(\vec{\Xi}) = \vec{\xi} = \mathbf{R}\vec{\Xi} \end{cases} \tag{A.41}$$

mit $\mathbf{R} \in O_3\mathbb{R}$ dargestellt werden. Seien $Fix(\varphi) = \{\lambda\vec{f} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ die Drehachse und ψ der positive Drehwinkel, dann ist φ gegeben durch

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ \vec{\Xi} & \mapsto & (\cos\psi)\vec{\Xi} + (1-\cos\psi)\frac{(\vec{\Xi}\cdot\vec{f})}{|\vec{f}|^2} \otimes \vec{f} + \frac{\sin\psi}{|\vec{f}|}(\vec{f} \times \vec{\Xi}) \end{array} \right. . \tag{A.42}$$

Mit Hilfe der Identität

$$\vec{\Xi} = \mathbf{I} \cdot \vec{\Xi} \tag{A.43}$$

kann Gleichung A.42 in das Produkt einer Dyade mit $\vec{\Xi}$ umgeschrieben werden. Es folgt dann für $|\vec{f}| = 1$ die Darstellung

$$\vec{\xi} = \mathbf{\Omega}\vec{\Xi} \text{ mit } \mathbf{\Omega}(\vec{f}, \psi) = \vec{f} \otimes \vec{f} + \cos\psi(\mathbf{I} - \vec{f} \otimes \vec{f}) + \sin\psi\vec{f} \times \mathbf{I} \tag{A.44}$$

wobei $\mathbf{\Omega}$ auch als Versor bezeichnet wird. Zur Vereinfachung der Darstellung wird ein Drehvektor

$$\vec{v} = \tan\frac{\psi}{2}\vec{f} \tag{A.45}$$

eingeführt. Unter Benutzung der trigonometrischen Beziehungen

$$\sin\psi = \frac{2v}{1+v^2} \text{ und } \cos\psi = \frac{1-v^2}{1+v^2} \text{ mit } v = \mid \vec{v} \mid \tag{A.46}$$

ergeben sich für den Versor

$$\mathbf{\Omega}(\vec{v}) = \frac{(1-\vec{v}\cdot\vec{v})\mathbf{I} + 2\vec{v} \otimes \vec{v} + 2\vec{v} \times \mathbf{I}}{1+\vec{v}\cdot\vec{v}} \tag{A.47}$$

und in Komponentendarstellung $\mathbf{\Omega} = v^m\Xi_m$, wenn der Nenner in Gleichung A.47 auf die andere Seite gebracht wird, die CAYLEYschen Formeln

$$(1 + v^{1^2} + v^{2^2} + v^{3^2}) \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 + v^{1^2} - v^{2^2} - v^{3^2} & 2(v^1v^2 - v^3) & 2(v^1v^3 + v^2) \\ 2(v^1v^2 + v^3) & 1 - v^{1^2} + v^{2^2} - v^{3^2} & 2(v^2v^3 - v^1) \\ 2(v^1v^3 - v^2) & 2(v^2v^3 + v^1) & 1 - v^{1^2} - v^{2^2} + v^{3^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Xi_1 \\ \Xi_2 \\ \Xi_3 \end{pmatrix} \tag{A.48}$$

Wird nun in Gleichung A.44 der Drehvektor

$$\vec{\omega} = \psi\vec{f} = \omega^m\Xi_m \text{ mit } \mid \vec{\omega} \mid = \psi \tag{A.49}$$

eingesetzt, ergibt sich die Drehmatrix $\mathbf{R}$ in Gleichung A.41 zu

$$\mathbf{R} = \mathbf{\Omega}(\vec{\omega}) = \mathbf{I} + \frac{\sin\psi}{\psi}\mathbf{D} + \frac{1-\cos\psi}{\psi^2}\mathbf{D}^2 \tag{A.50}$$

oder in Komponentenschreibweise zu

$$R_i^k = \delta_i^k + \frac{\sin\psi}{\psi}D_i^k + \frac{1-\cos\psi}{\psi^2}D_i^j D_j^k. \tag{A.51}$$

Die Matrix $\mathbf{D}$ hat dabei die Form

$$\mathbf{D} = D_i^j = \begin{pmatrix} 0 & \omega^3 & -\omega^2 \\ -\omega^3 & 0 & \omega^1 \\ \omega^2 & -\omega^1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{A.52}$$

Zur Verbesserung der Handhabbarkeit werden die Komponenten von $\mathbf{R}$ in eine Reihe entwickelt

$$R_i^k = \delta_i^k + (1 - \frac{1}{3!}\psi^2 + ...)D_i^k + (\frac{1}{2} - \frac{1}{4!}\psi^2 + ...)D_i^j D_j^k. \tag{A.53}$$

Eine weitere Möglichkeit zur Beschreibung des Drehvektors ist

$$\vec{\omega} = \omega\vec{f} \text{ mit } \omega = \mid \vec{\omega} \mid = 2\sin\frac{\psi}{2}. \tag{A.54}$$

Unter Berücksichtigung der trigonometrischen Beziehungen

$$\sin\psi = \omega\sqrt{1 - \left(\frac{\omega}{2}\right)^2}, \cos\psi = 1 - \frac{\omega^2}{2} \tag{A.55}$$

und der Beziehung

$$\vec{f} = \frac{\vec{\omega}}{\omega}$$

folgt für die Drehmatrix $\mathbf{R}$ in Gleichung A.50:

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \mathbf{I} + \frac{\omega\sqrt{1 - \left(\frac{\omega}{2}\right)^2}}{\omega}\mathbf{D} + \frac{1 - \left(1 - \frac{\omega^2}{2}\right)}{\omega^2}\mathbf{D}^2 \\ &= \mathbf{I} + \sqrt{1 - \left(\frac{\omega}{2}\right)^2}\mathbf{D} + \frac{1}{2}\mathbf{D}^2, \end{aligned} \tag{A.56}$$

in Komponentenschreibweise

$$R_i^k = \delta_i^k + \sqrt{1 - \left(\frac{\omega}{2}\right)^2}D_i^k + \frac{1}{2}D_i^j D_j^k \tag{A.57}$$

und als Matrix

$$\mathbf{R} = R_i^k = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{2}(\omega^{2^2} + \omega^{3^2}) & \hat{\omega}\omega^3 + \frac{1}{2}\omega^1\omega^2 & -\hat{\omega}\omega^2 + \frac{1}{2}\omega^1\omega^3 \\ -\hat{\omega}\omega^3 + \frac{1}{2}\omega^1\omega^2 & 1 - \frac{1}{2}(\omega^{1^2} + \omega^{3^2}) & \hat{\omega}\omega^1 + \frac{1}{2}\omega^2\omega^3 \\ \hat{\omega}\omega^2 + \frac{1}{2}\omega^1\omega^3 & -\hat{\omega}\omega^1 + \frac{1}{2}\omega^2\omega^3 & 1 - \frac{1}{2}(\omega^{1^2} + \omega^{2^2}) \end{pmatrix}. \tag{A.58}$$

Literaturverzeichnis

[1] Altenbach, J./ Altenbach, H.: Einführung in die Kontinuumsmechanik, Stuttgart: B.G. Teubner 1994.

[2] Argyris, J. H.: An Excursion into Large Rotations, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering Vol.32, 1982, S.85-155.

[3] Argyris, J. H./ Dunne, P. C.: Non-Linear and Post-Buckling Analysis of Structures in Formulations and Computational Algorithms in Finite Element Analysis, U.S.-Germany Symposium 1976, S.525-571.

[4] Barthold, F-J.: Theorie und Numerik zur Berechnung und Optimierung von Strukturen aus isotropen, hyperelastischen Materialien, Bericht-Nr. F93/2, Universität Hannover, 1993.

[5] Bertram, A.: Axiomatische Einführung in die Kontinuumsmechanik, Mannheim/ Wien/ Zürich: BI-Wiss. 1989.

[6] Britvec, S. J.: The Stability of Elastic Systems, New York/ Toronto/ Oxford/ Sydney/ Braunschweig: Pergamon Press, Inc. 1973.

[7] Bronstein, I. N.: Taschenbuch der Mathematik, 4.,ueberarb. u. erw. Aufl. CD-ROM, 1999.

[8] Cohen, A. C./ Whitten, B. J.: Parameter Estimation in Reliability and Life Span Models, Marcel Dekker, Inc. 1988.

[9] Dischinger, F.: Untersuchungen über die Knicksicherheit, die elastische Verformung und das Kriechen des Betons bei Bogenbrücken, Der Bauingenieur 18, 1937, S.487-520.

[10] Dietrich, E./ Schulze; A.: Statistische Verfahren zur Qualifikation von Meßmitteln, Maschinen und Prozessen, 3.Aufl., München Wien: Carl Hanser Verlag 1998.

[11] Ehlbeck, J./ Blaß, H. J.: Imperfektionsannahmen für Holzdruckstäbe, Holz als Roh- und Werkstoff 45, 1987, S. 231-235.

[12] Ehlbeck, J./ Blaß, H. J.: Zuverlässigkeit von Holzdruckstäben, Universität Karlsruhe, 1987.

[13] Elandt, R. C.: The Folded Normal Distribution: Two Methods of Estimating Parameters from Moments, Technometrics, 1961, S. 551-562.

[14] Engesser, F.: Die Sicherung offener Brücken gegen Ausknicken, Zentralblatt der Bauverwaltung 4, 1884, S.415-417.

[15] Fischer, G.: Lineare Algebra, 12.Aufl., Braunschweig/ Wiesbaden: Vieweg 2000.

[16] Fleischer, E.: Beitrag zur Ermittlung der Maßgenauigkeit im Stahlbetonskelettbau, Diss., Technische Universität Universität 1979.

[17] Forde, B. W. R./ Stiemer, S. F.: Improved Arc Length Orthogonality Methods for Nonlinear Finite Element Analysis, Computers & Structures Vol. 27, No. 5, 1987, S.625-630.

[18] Geiger, W.: Gefaltete und Betragsverteilungen, QZ 21, 1976, S. 156-160.

[19] Gerold, W.: Zur Frage der Beanspruchung von stabilisierenden Verbänden und Trägern, Stahlbau 32, 1963, S.278-281.

[20] Gerold, W.: Wind- und Stabilisierungsverbände, Bauen mit Holz, 3/1998, S.41-49 .

[21] Günther, W.: Zur Statik und Dynamik des Cosseratschen Kontinuums, Abh. Braunsch. Wiss. Ges., Band X 1958, S. 195-213.

[22] Hoppe, U.: Über grundlegende Konzepte der nichtlinearen Kontinuumsmechanik und Schalentheorie, Mitteilung-Nr. 101, Ruhr-Universität Bochum 1996.

[23] Johnson, N. L./ Leone, F. C.: Statistics and Experimental Design in Engineering and Physical Sciences, John Wiley & Sons, Inc., 1977.

[24] Johnson, N. L.: The Folded Normal Distribution: Accuracy of Estimation by Maximum Likelihood, Technometrics 4, 1962, S. 249-256.

[25] Kappus, R.: Zur Elastizitätstheorie endlicher Verschiebungen 1. Teil, ZAMM 19 1939, Heft 5, S. 271-285.

[26] Kappus, R.: Zur Elastizitätstheorie endlicher Verschiebungen 2. Teil, ZAMM 19 1939, Heft 6, S. 344-361.

[27] Kessel, M. H.: Theoretische und numerische Behandlung gerader Stäbe mit endlichen Drehungen, Bericht-Nr. F80/1, Universität Hannover 1980.

[28] Kessel, M. H./ Mertinaschk, A.: Imperfektionsmessungen an Nagelplattenbindern, Forschungsbericht, Universität Braunschweig, 2001.

[29] Kessel, M. H./ Mertinaschk, A.: Imperfection Measurements for Trusses using Nail Plates, WCTE 2000, Proceedings of the World Conference on Timber Engineering, Session 7.3.5, Whistler Resort BC Canada 2000.

[30] Kessel, M. H.: Zum räumlichen Tragverhalten von Nagelplattenbindern, Bauingenieur 71, 1996, S.211-218.

[31] Klingbeil, E.: Tensorrechnung für Ingenieure, 2.Aufl., Mannheim/ Wien/ Zürich: BI-Wiss. 1989.

[32] Kohnke, P.: ANSYS Theory Reference, Release 5.4, Canonsburg: ANSYS, Inc. 1994.

[33] Kollbrunner, C. F./ Meister, M.: Knicken, Biegedrillknicken, Kippen; Theorie und Berechnung von Knickstäben, Knickvorschriften, Berlin/ Göttingen/ Heidelberg: Springer 1961.

[34] Lagally, M.: Vorlesungen über Vektorrechnung, 6.Aufl. bearbeitet von Walter Franz, Leipzig: AVG Geest & Portig K.-G. 1959.

[35] Leigh, D. C.: Nonlinear Continuum Mechanics, New York/ St. Louis/ San Francisco/ Toronto/ London/ Sydney: McGraw-Hill Book Company 1968.

[36] Leipholz, H.: Stabilitätstheorie, Stuttgart: B. G. Teubner 1968.

[37] Leone, F. C./ Nelson, L. S./ Nottingham, R. B.: The Folded Normal Distribution, Technometrics 3, 1961, S. 543-562.

[38] Lindner, J./ Gietzelt, R.: Imperfektionsannahmen für Stützenschiefstellungen, Stahlbau, 4/1984, S.97-101.

[39] Lindner, J./ Gietzelt, R.: Imperfektionen mehrgeschossiger Stahlstützen (Stützenschiefstellungen), Bericht Nr. 2038-A, Technische Universität Berlin 1983.

[40] Lumpe, G.: Geometrisch nichtlineare Berechnung von räumlichen Stabwerken, Mitteilung Nr. 28, Universität Hannover 1982.

[41] Meyberg, K./ Vachenauer, P.: Höhere Mathematik, 1.korr. Nachdr., Berlin/ Heidelberg/ New York/...: Springer 1990.

[42] Möhler, K./ Schelling, W.: Zur Bemessung von Knickverbänden und Knickaussteifungen im Holzbau, Der Bauingenieur 43, 2/1968, S.43-48.

[43] Natterer, J./ Kessel, M. H.: Theoretische und experimentelle Untersuchungen zur seitlichen Stabilisierung von Biegeträgern, Forschungsbericht KFWR Nr. 1075, EPFL/ IBOIS 1985.

[44] Paschen, H./ Sack, W-M.: Maßtoleranzen und Passungsberechnung im Stahlbetonskelett-Fertigteilbau Wiesbaden/ Berlin: Bauverlag 1980.

[45] Petersen, C.: Statik und Stabilität der Baukonstruktionen, 2.Aufl., Braunschweig/ Wiesbaden: Vieweg 1982.

[46] Petersen, C.: Stahlbau: Grundlagen der Berechnung und baulichen Ausbildung von Stahlbauten, 2.Aufl., Braunschweig/ Wiesbaden: Vieweg 1990.

[47] Pflüger, A.: Stabilitätsprobleme der Elastostatik, 2.Aufl., Berlin/ Göttingen/ Heidelberg/ New York: Springer 1964.

[48] Przemieniecki, J. S.: Theory of Matrix Structural Analysis, New York: McGraw-Hill 1968.

[49] Ramm, E.: A Plate/ Shell Element for Large Deflections and Rotations in Formulations and Computational Algorithms in Finite Element Analysis, U.S.-Germany Symposium 1976, S.264-291.

[50] Rankin, C. C./ Brogan, F. A.: An Element Independent Corotational Procedure for the Treatment of Large Rotations, Journal of Pressure Vessel Technology Vol.108, 1986, Heft 5, S.165-174.

[51] Reitinger, R.: Stabilität und Optimierung imperfektionsempfindlicher Tragwerke, Bericht, Universität Stuttgart 1994.

[52] Schaefer, H.: Das Cosserat-Kontinuum, ZAMM 47 1967, Heft 8, S. 485-498.

[53] Speich, M.: Ein Beitrag zur Beurteilung des stabilitätsverhaltens verbandsgestützter, parallelgurtiger Brettschichtträger, Fortschritt-Berichte VDI, Reihe 4: Bauingenieurwesen, Nr. 84, Düsseldorf: VDI-Verlag 1987.

[54] Stein, E./ Barthold, F-J.: Elastizitätstheorie, Der Ingenieurbau, Berlin: Ernst & Sohn 1997.

[55] Stein, E./ Kessel, M. H.: Numerische Methoden und deren Konvergenz zur statischen Berechnung geometrisch nichtlinearer Stabwerke im unter- und überkritischen Bereich, Ingenieur-Archiv 46, 1977, S. 323-335.

[56] Strauch, H.: Statistische Güteüberwachung München: 1956.

[57] Teichmann, H.: Physikalische Anwendung der Vektor- und Tensorrechnung, 2.Aufl., Mannheim: BI 1964.

[58] Wagner, W.: Zur Behandlung von Stabilitätsproblemen der Elastostatik mit der Methode der finiten Elemente, Bericht-Nr. F91/1, Universität Hannover 1991.

[59] Zimmermann, H.: Lehre vom Knicken auf neuer Grundlage, Berlin: Ernst & Sohn 1930.