

Versuch 27: Messungen zum Wiedemann-Franz'schen Gesetz

In diesem Versuch soll die Temperaturverteilung an Metallstäben in ihrer zeitlichen Entwicklung untersucht werden. Auf diese Weise kann die zeitliche und räumliche Abhängigkeit des Wärmetransports studiert werden. Weiterhin wird die Methode von van der Pauw zur Messung der elektrischen Leitfähigkeit von dünnen Filmen vorgestellt. Über den Vergleich der Messergebnisse aus beiden Versuchsteilen soll das Wiedemann-Franz'sche Gesetz überprüft werden.

Vorkenntnisse

Wärme und Temperatur – Mechanismen des Wärmetransports – Umwandlung von elektrischer Energie in Wärmeenergie – Thermische Leitfähigkeit von Metallen – Elektrische Leitfähigkeit von Metallen – Wiedemann-Franz'sches Gesetz – Kontinuitätsgleichung – Temperaturabhängigkeit des elektrischen Widerstandes von Festkörpern – Ohmsches Gesetz – Messmethoden der elektrischen Leitfähigkeit

Physikalische Grundlagen

Das Wiedemann-Franz'sche Gesetz

Sowohl die Wärmeleitfähigkeit λ als auch die elektrische Leitfähigkeit σ werden in (reinen) Metallen beinahe ausschließlich von den freien Ladungsträgern getragen. Unter dieser Voraussetzung ist das Verhältnis beider Größen zueinander konstant und der absoluten Temperatur T proportional (Wiedemann-Franz'sches Gesetz) und es gilt

$$\frac{\lambda}{\sigma} = \frac{\pi^2}{3} \left(\frac{k_B}{e} \right)^2 T, \quad (1)$$

wobei $L = \frac{\lambda}{\sigma T} = \frac{\pi^2}{3} \left(\frac{k_B}{e} \right)^2 = 2,45 \times 10^{-8} \frac{V^2}{K^2}$ als Lorenz-Zahl bezeichnet wird. Sie ist temperaturunabhängig. Aus dem Wiedemann-Franz'schen Gesetz geht also hervor, dass gute Wärmeleiter auch gute elektrische Leiter sind und umgekehrt schlechte Wärmeleiter auch schlechte elektrische Leiter. Für eine Herleitung des Wiedemann-Franz'sches Gesetzes wird an dieser Stelle auf die Literatur verwiesen, z.B.:

Bergmann-Schaefer, Lehrbuch der Experimentalphysik 6 – Festkörper, de Gruyter Verlag, 2005.
C. Kittel, Einführung in die Festkörperphysik, Oldenbourg Verlag, 1989.
R. Gross, A. Marx, Festkörperphysik, Oldenbourg Verlag, 2012.

...

Material	λ (W cm ⁻¹ K ⁻¹)	σ (Ω ⁻¹ m ⁻¹)
Cu	4,01	$5,96 \times 10^7$
Al	2,37	$3,77 \times 10^7$
Fe	0,802	$1,04 \times 10^7$
Au	3,17	$4,52 \times 10^7$
Ag	4,29	$6,30 \times 10^7$
Pb	0,353	$0,48 \times 10^7$

Tabelle 1: Literaturwerte thermischer und elektrischer Leitfähigkeiten für ausgewählte Metalle nach dem CRC HANDBOOK OF CHEMISTRY AND PHYSICS. Die elektrischen Leitfähigkeiten wurden aus den spezifischen Widerständen bei $T = 293$ K errechnet.

Experimentell über das Wiedemann-Franz'sche Gesetz bestimmte Lorenz-Zahlen für Metalle stimmen immer nur bei hohen Temperaturen (größenordnungsmäßig etwa 100 K) gut mit den theoretisch nach Gl. (1) erwarteten Werten überein.

Leitfähigkeitsmessung nach van der Pauw

Die hier als skalar betrachtete elektrische Leitfähigkeit σ und der spezifische Widerstand $\rho_{\text{el}} = 1/\sigma$ sind über das Ohmsche Gesetz

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} \quad (2)$$

definiert. Eine interessante Methode zur Messung des spezifischen Widerstands hat L. J. van der Pauw im Jahr 1958 angegeben¹. Im Gegensatz zu den sonst üblichen „eindimensionalen“ Verfahren wird bei der Widerstandsmessung nach van der Pauw eine zweidimensionale Probe in Form einer dünnen Folie oder einer flachen Scheibe mit konstanter Dicke d und beliebig geformtem Rand benutzt (s. Abb. 1). Die Probe muss einfach zusammenhängend sein, d.h. sie darf keine Löcher aufweisen.

Auf dem Probenrand sind insgesamt vier elektrische Kontakte (A, B, C und D) möglichst geringer Ausdehnung mehr oder weniger willkürlich angeordnet, von denen zunächst A und B zur Stromspeisung und C und D zur Spannungsmessung verwendet werden. Das Verhältnis von Spannung zu Strom wird als Widerstand $R_{\text{AB,CD}}$ definiert. Einen zweiten Widerstand $R_{\text{BC,DA}}$ erhält man analog, wenn die Kontakte für Stromspeisung und Spannungsmessung zyklisch getauscht werden.

Mit den so gewonnenen Widerstandswerten ergibt sich der zu bestimmende spezifische Widerstand des untersuchten Materials nach der Gleichung

$$\rho_{\text{el}} = \frac{\pi d}{2 \ln 2} (R_{\text{AB,CD}} + R_{\text{BC,DA}}) f \left(\frac{R_{\text{AB,CD}}}{R_{\text{BC,DA}}} \right). \quad (3)$$

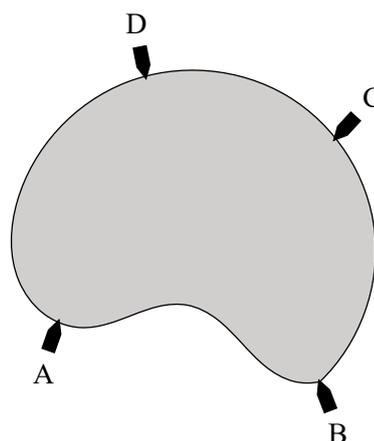


Abb. 1: Kontaktierschema für eine Widerstandsmessung nach van der Pauw.

¹L. J. van der Pauw, A method of measuring specific resistivity and Hall effect of discs of arbitrary shape, Philips Research Report **13**, 1 (1958).

Die Funktion $f\left(\frac{R_{AB,CD}}{R_{BC,DA}}\right)$ wurde von van der Pauw berechnet und ist für die Versuchsauswertung an dieses Skript angehängt.

Zur Herleitung von Gl. (3)

Van der Pauw hat in „A method of measuring specific resistivity and Hall effect of discs of arbitrary shape“ eine Herleitung von Gl. (3) angegeben. Er zeigt darin die allgemeine Gültigkeit der Beziehung

$$\exp(-\pi R_{AB,CD}d/\rho_{el}) + \exp(-\pi R_{BC,DA}d/\rho_{el}) = 1 \quad (4)$$

für die oben angegebene Geometrie, indem er zunächst von einer halbunendlichen Probe mit den Kontakten P, Q, R und S auf deren Rand (in dieser Reihenfolge) ausgeht und den Spannungsabfall $V_S - V_R$ bei Einspeisung des Stromes I in P und Q berechnet. Dann zeigt er, dass Gl. (4) auch für beliebig geformte, einfach zusammenhängende Proben mit konstanter Dicke ihre Gültigkeit behält. Dies gelingt mit der Theorie der konformen Abbildungen. Fasst man die Probe als obere Hälfte der komplexen z -Ebene auf, lässt sich nach einem Theorem eine Transformation in Form einer analytischen Funktion $t(z)$ angeben, die die Halbebene mit den Kontakten P, Q, R und S auf das der tatsächlichen Probenform entsprechende Gebiet in der t -Ebene mit den Kontakten A, B, C und D konform abbildet. Eine solche Abbildung ist winkeltreu und überführt Feldlinien in Feldlinien und Äquipotentiallinien in Äquipotentiallinien, sodass die Potentialdifferenzen $V_S - V_R$ und $V_D - V_C$ invariant gegenüber konformen Abbildungen und somit gleich sind. Die obigen Gleichungen bleiben daher unverändert bestehen, wenn man die Bezeichnungen der Kontakte auswechselt. Damit ist die Gültigkeit von Gl. (4) für alle Proben mit der genannten Geometrie gezeigt.

Die Beziehung in Gl. (3) zur Bestimmung von ρ_{el} erhält man durch Umformung von Gl. (4). Hierzu wird die oben erwähnte Funktion f verwendet. Sie wirkt auf das Verhältnis $\frac{R_{AB,CD}}{R_{BC,DA}}$ der Widerstände. Sie ist definiert durch

$$\frac{R_{AB,CD} - R_{BC,DA}}{R_{AB,CD} + R_{BC,DA}} = \frac{f}{\ln 2} \operatorname{arcosh} \left\{ \frac{\exp(\ln 2/f)}{2} \right\} \quad (5)$$

Es ist nicht möglich, diese Gleichung explizit nach f aufzulösen, f ist nur durch diese sogenannte *implizite Darstellung* verfügbar.

Wärmeleitung

Die Definition der hier als skalar angenommenen Wärmeleitfähigkeit λ ergibt sich, indem man die Proportionalität der Wärmestromdichte \vec{j}_w zum vorhandenen Temperaturgradienten ausdrückt

$$\vec{j}_w = -\lambda \operatorname{grad}_{\vec{r}} T \quad (6)$$

Für die Wärmestromdichte \vec{j}_w ergibt sich andererseits aus der Kontinuitätsgleichung, dass

$$\operatorname{div}_{\vec{r}} \vec{j}_w + \frac{\partial q}{\partial t} = W \quad (7)$$

Hierbei ist W die Wärmeleistungsdichte und q die im Volumenelement enthaltene Wärme, also

$$dq = \rho c_p dT \quad (8)$$

mit der Massendichte $\rho = m/V$ und der spezifischen Wärme bei konstantem Druck c_p . Durch Einsetzen von Gl. (6) und (8) in die Kontinuitätsgleichung erhält man die Wärmeleitungsgleichung

$$\Delta_{\vec{r}} T = \frac{\rho c_p}{\lambda} \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{W}{\lambda}. \quad (9)$$

Für den Quotienten aus der Wärmeleitfähigkeit λ und der spezifischen Wärme pro Volumen $m/V c_p$ führt man die Temperaturleitfähigkeit α ein und erhält schließlich die Wärmeleitungsgleichung in ihrer endgültigen Form

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \Delta_{\vec{r}} T + \frac{\alpha}{\lambda} W \quad \text{mit} \quad \alpha = \frac{\lambda}{\rho c_p} \quad (10)$$

Man erkennt, dass sowohl eine positive Krümmung des Temperaturprofils als auch die direkte Freisetzung von Wärme zu einem Temperaturanstieg führen. Als Spezialfall betrachten wir den Fall konstanter Wärmezufuhr ($W(t) = \text{const}$). Hier stellt sich nach hinreichend langer Zeit ein sogenannter stationärer Zustand ein und die Temperaturverteilung wird dann zeitunabhängig ($\frac{\partial T}{\partial t} = 0$). Gl. (10) hat dann die Form einer Potentialgleichung mit

$$\Delta_{\vec{r}} T = -\frac{1}{\lambda} W. \quad (11)$$

Experiment

Versuchsaufbau zur Messung der Wärmeleitfähigkeit

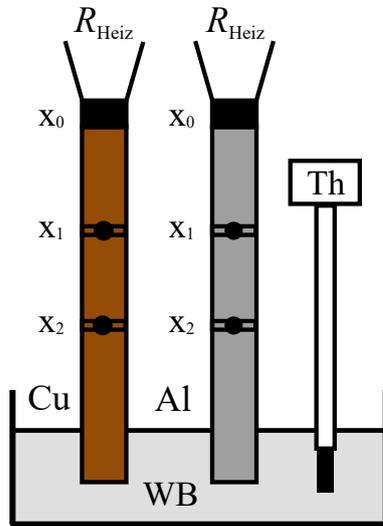


Abb. 2: Schematische Skizze des Versuchsaufbaus.

Zur Messung der Wärmeleitfähigkeit werden zwei thermisch isolierte Metallstäbe aus Kupfer und Aluminium verwendet, die an ihrem oberen Ende bei x_0 mit einem Heizwiderstand R_{Heiz} versehen sind. Der Heizstrom wird von einem Netzteil geliefert, wobei Strom und Spannung zur Bestimmung der Heizleistung mit Hilfe zweier Digitalmultimeter und/oder direkt am Gerät gemessen werden können. Zwei Digitalmultimeter werden für die Temperaturmessung in Verbindung mit zwei Platin-PTC-Widerständen benötigt. Die Sensoren sind im Abstand von 100 mm voneinander in den Stäben bei x_1 und x_2 integriert. In der folgenden Tabelle sind die Kalibrierdaten für die Widerstände aufgeführt. Berechnen Sie die Kalibrierfunktion $T(R)$ aus diesen Daten.

Temperatur T ($^{\circ}\text{C}$)	Widerstand R (Ω)	Temperatur T ($^{\circ}\text{C}$)	Widerstand R (Ω)
0	1000,0	80	1308,9
10	1039,0	90	1347,0
20	1077,9	100	1385,0
30	1116,7	110	1422,9
40	1155,4	120	1460,6
50	1194,0	130	1498,2
60	1232,4	140	1535,8
70	1270,7	150	1573,0

Um einen Wärmerückstau zu vermeiden, sind die Stäbe mit ihrem unteren Ende an ein Temperaturbad gekoppelt. Dieses Bad ist durch eine dicke Aluminiumplatte realisiert.

Versuchsaufbau zur Bestimmung des spezifischen Widerstandes

Für die Messung des spezifischen Widerstandes steht jeweils eine bereits mit Kontakten versehene Folie aus Kupfer bzw. Aluminium zur Verfügung. Die Dicke dieser Folien ist am Messplatz angegeben. Zur Durchführung der Messungen werden weiter ein Netzteil und zwei Digitalmultimeter zur Strom- und Spannungsmessung benötigt.

Versuchsaufgaben

1. Wärmeleitfähigkeit von Kupfer und Aluminium

Messen Sie den zeitlichen Verlauf der Temperaturverteilung in einem Cu-Stab und Al-Stab, wie er sich nach Einschalten einer an einem Ende angebrachten Heizung ergibt.

Nehmen Sie gleichzeitig(!) mit dem Einschalten des Heizstroms die Widerstandswerte der zwei Thermowiderstände etwa 30 Minuten lang auf. Nach dieser Zeit hat sich – unabhängig von

der verwendeten Heizleistung – ein nahezu stationärer Zustand eingestellt. Tragen Sie die Widerstandswerte als Funktion der Zeit $R(t)$ auf. ΔT ergibt sich durch Umrechnung von $\Delta R = R(x_1) - R(x_2)$. Zeigen Sie anhand des zeitlichen Verlaufs Ihrer Daten, dass trotz leichter Drift der Widerstände ein stationärer Zustand der Wärmeleitung erreicht ist. *Wie kann die weitere Drift erklärt werden?* Messen Sie $T_{1/2}(t)$ bzw. $R_{1/2}(t)$ für beide Stäbe.

Stellen Sie weiter die Abhängigkeit der Temperatur, die sich zum Ende des Versuchs eingestellt hat, von der Entfernung x zum Heizwiderstand dar und bestimmen Sie die thermische Leitfähigkeit von Kupfer und Aluminium. Die Messung der thermischen Leitfähigkeit erfolgt nach Gl. (6) mit Hilfe eines konstanten Wärmestroms, der zwischen den beiden Messpunkten x_1 und x_2 einen Temperaturabfall verursacht (analog einem Spannungsabfall über einen elektrischen Widerstand). Gehen Sie davon aus, dass die elektrische Energie im Heizwiderstand vollständig in Joulesche Wärme umgewandelt wird. Die sich einstellende Wärmestromdichte j_w kann dann aus dem Heizstrom I , der Heizspannung U und der Querschnittsfläche des Stabes mit dem Radius r berechnet werden über

$$j_w = \frac{1}{\pi r^2} P_{el} = \frac{1}{\pi r^2} U I. \quad (12)$$

Messen Sie die Stabdurchmesser mit einem Messschieber. Bilden Sie dazu Mittelwert und Standardabweichung von mindestens fünf Messungen.

Voraussetzung für sinnvolle Ergebnisse ist die hinreichende Stationarität. Daher ist es angebracht, für die Berechnung der Wärmestromdichte nur Werte gegen Ende der Messung zu verwenden wenn $\Delta T \approx \text{const.}$ gilt. Achten Sie darauf, dass die Maximalleistung des Widerstands nicht überschritten wird. Vergleichen Sie für beide Metalle die gewonnenen Daten mit Literaturwerten.

2. Spezifischer Widerstand von Kupfer und Aluminium

Bestimmen Sie den spezifischen Widerstand von Aluminium und Kupfer nach der Methode von van der Pauw. Der Strom wird über je zwei der vier vorhandenen Kontakte eingespeist. Lesen Sie die Stromstärke am dazu in Serie geschalteten Multimeter ab, während das zweite Multimeter zur Spannungsmessung an den anderen beiden Kontakten dient.

Führen Sie die Messung zunächst für Kupfer bei unterschiedlichen Einstellungen der Stromstärke durch und bilden Sie daraus die Mittelwerte der Widerstände $R_{AB,CD}$ und nach zyklischem Vertauschen der Anschlüsse die Mittelwerte der Widerstände $R_{BC,DA}$. Bestimmen Sie daraus den spezifischen Widerstand ρ_{el} über Gl. (3). Wiederholen Sie die Messungen anschließend für Aluminium. Geben Sie für beide Metalle auch die elektrische Leitfähigkeit an und vergleichen Sie diese mit den Literaturwerten!

3. Bestimmung der Lorenz-Zahl

Berechnen Sie mit den gewonnenen Daten die Lorenz-Zahl L und vergleichen Sie das Ergebnis mit dem theoretischen Wert.

Anhang: Graphische Auftragung der van der Pauw Funktion

