INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

Prof. Dr. Wolfram Brenig
Niklas Casper
Erik Wagner

Thermodynamik und Quantenstatistik WS 2018/19

14. Übungsblatt

Besprechung in der Vorlesung am Do. 31.01.2019, keine Abgabe

Übungsblätter gibt es unter `https://www.tu-bs.de/theophys/edu/wise-1819/thermo1819`.

55. **Wissensfragen**

Bitte benennen Sie alle verwendeten Symbole und antworten Sie in vollständigen Sätzen.

(a) Was besagt das Gesetz der großen Zahlen?

(b) Wie sieht der statistische Operator für reine und für gemischte Makro-Zustände aus? Was charakterisiert den reinen Fall?

(c) Leiten Sie einen Zusammenhang zwischen C_V und ΔH (Hamiltonoperator H) her.

(d) Ein System bestehe aus 3 Energieniveaus E , $2E$ und $3E$. Argumentieren Sie zunächst, wie groß die Entropie in den Grenzfällen $T = 0$ bzw. $T = \infty$ ist. Kommen Sie rechnerisch auf das gleiche Ergebnis?

(e) Die Zustandssumme eines Systems sei durch $Z = e^{aTV}$ mit $a = \text{const}$ gegeben. Berechnen Sie Druck p, Entropie S und Energie E.

56. **Thermodynamische Relationen**

Zeigen Sie, dass für die Enthalpie $I(S, P, N)$ mit $\mathrm{d}I = T\,\mathrm{d}S + V\,\mathrm{d}P + \mu\,\mathrm{d}N$ folgende Beziehungen gelten:

(a)

$$\left(\frac{\partial I}{\partial T}\right)_{V,N} = C_V + \frac{\alpha V}{\kappa_T}$$

(b)

$$\left(\frac{\partial I}{\partial V}\right)_{T,N} = \frac{\alpha T - 1}{\kappa_T}$$

Verwenden Sie für diese Rechnung die Legendre-Transformierte der inneren Energie E anstelle der Enthalpie I. Eventuell hilft Ihnen dann nachfolgende Beziehung, die bei Verwendung allerdings nachgewiesen werden müsste:

$$\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_{T,N} = T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_{V,N} - P$$

Dabei sind α und κ_T gegeben durch $\alpha = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_{P,N}$ und $\kappa_T = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_{T,N}$.

Bitte wenden! →

57. **Diesel-Kreisprozess**

Betrachten Sie den Dieselprozess, der aus den folgenden Schritten besteht:

1.) Adiabatische Kompression

2.) Isobare Erwärmung mit Volumenänderung von $V_\mathrm{k} \to V_\mathrm{k} + V_\mathrm{e}$, mit V_e: Einspritzvolumen

3.) Adiabatische Expansion nach $V_\mathrm{k} + V_\mathrm{h}$, mit V_h: Hubvolumen

4.) Isochore Abkühlung

Dieser Prozess soll mit einem idealen Gas betrieben werden.

(a) Skizzieren Sie den Prozess im (S, T)-Diagramm und im (P, V)-Diagramm. Geben Sie die funktionalen Abhängigkeiten in den einzelnen Teilschritten an.

(b) Bestimmen Sie die übertragene Wärme und die geleistete Arbeit bei den vier Schritten (als Funktion der Temperaturen an den vier Eckpunkten).

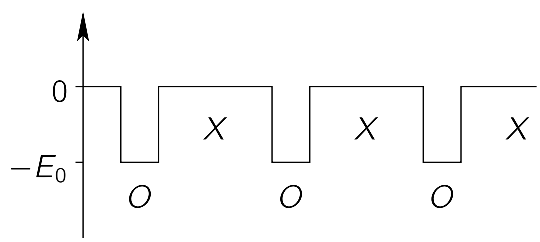
(c) Zeigen Sie, dass der Wirkungsgrad eines Dieselmotors gegeben ist durch

$$\eta = 1 - \epsilon^{1-\gamma} \frac{\phi^\gamma - 1}{\gamma(\phi - 1)}$$

mit $\gamma = C_P/C_V$, $\epsilon = (V_k + V_h)/V_k$ (Verdichtungsverhältnis) und $\phi = (V_k + V_e)/V_k$ (Einspritzverhältnis).

58. **Gittergas in einer Dimension**

Betrachten Sie einen eindimensionalen Kristall aus N gleichen Atomen. Die Atome befinden sich an den Gitterplätzen O mit der Energie $\varepsilon = -E_0$. Die Atome können nun auf einen von zwei benachbarten Zwischengitterplätzen X mit der Energie $\varepsilon = 0$ angeregt werden.



(a) Berechnen Sie die Entropie der Zustände, bei denen sich n Atome auf Zwischengitterplätzen befinden. Es gilt $1 \ll n \ll N$. Wegen $n \ll N$ können Sie vernachlässigen, dass zwei benachbarte Atome auf denselben Zwischengitterplatz angeregt werden könnten.

(b) Wiederholen Sie Ihre Berechnung der Entropie aus (a), wobei die nicht besetzten Plätze (*Löcher*) im O-Gitter nicht mit den besetzten Zwischengitterplätzen korreliert sein sollen. D. h. die Atome können auch auf andere als die *direkt benachbarten* Zwischengitterplätze angeregt werden.

Bitte wenden! →

59. **Virialentwicklung**

Die Wechselwirkung der Teilchen eines Gases werde näherungsweise durch folgendes Potential beschrieben:

$$w(r) = \begin{cases} \infty & \text{wenn } r \leq d \\ r - 2d & \text{wenn } d < r \leq 2d \\ 0 & \text{wenn } 2d < r \end{cases}$$

(a) Skizzieren Sie das angegebene Potential.

(b) Berechnen Sie für dieses Potential den (klassischen) zweiten Virialkoeffizienten.

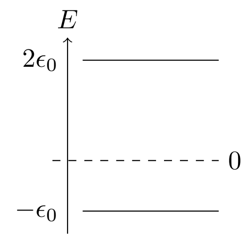
(c) Stellen Sie damit die Zustandsgleichung $P = P(N, V, T)$ auf.

(d) Berechnen Sie dann die Energie $E = E(N, V, T)$ und die spezifische Wärme C_v in gleicher Ordnung.

60. **Bosonen und Fermionen**

1) Wir betrachten Fermionen ohne Spin mit folgendem Energieschema:

$$\begin{aligned} E_1 &= \; -\epsilon_0 \\ E_2 &= \; 2\,\epsilon_0 \\ \epsilon_0 &> \; 0 \end{aligned}$$



(a) Geben Sie die Besetzungszahl $N(T, \mu)$ für dieses Energieschema an.

(b) Bestimmen Sie das chemische Potential $\mu(T)$ als Funktion der Temperatur T so, dass die Besetzungszahl $N(T, \mu) = 1$ ist.
Hinweis: Sie können sich viel Schreibarbeit mit der Ersetzung $a = e^{\epsilon_0/(k_B T)}$ und $x = e^{-\mu/(k_B T)}$ sparen.

2) Man betrachte nun den harmonischen Oszillator als Beispiel für ein spinloses bosonisches System. Die Energie E_n eines Zustandes sei gegeben durch

$$E_n = n + \frac{1}{2} \quad \text{mit } n \in \mathbb{N}$$

(a) Berechnen Sie die Zustandssumme in der kanonischen Gesamtheit.

(b) Berechnen Sie daraus die Energie E und spezifische Wärme C_V des Systems.