Technische Universität Braunschweig

INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

Prof. Dr. Wolfram Brenig
Niklas Casper
Erik Wagner

Thermodynamik und Quantenstatistik WS 2018/19

13. Übungsblatt

Abgabe: Di, 29.01.2019 bis 11:30 Uhr, Kasten neben A316

Übungsblätter gibt es unter `https://www.tu-bs.de/theophys/edu/wise-1819/thermo1819`.

50. **Wissensfragen (2 Punkte)**

    Bitte benennen Sie alle verwendeten Symbole und antworten Sie in vollständigen Sätzen.

    (a) Ein System werde von $\rho = \sum_i w_i \left|i\right\rangle \left\langle i\right|$ beschrieben. Sei $M = -\sum_i w_i \ln w_i$. Welche Form ergibt sich für w_i unter der Forderung $\frac{\partial M}{\partial w_i} = 0$ und

    i. $\sum_i w_i = 1$ oder

    ii. $\sum_i w_i = 1$ und $\sum_i w_i E_i = E$

51. **Pauli-Paramagnetismus (10 Punkte)**

    In einem äußeren Magnetfeld sind die Einteilchenenergien eines nicht wechselwirkenden Fermigases $\epsilon_\sigma(p)$ für die beiden Spinrichtungen $\sigma = \pm 1$ (parallel oder antiparallel zum Magnetfeld) unterschiedlich:

    $$\epsilon_\sigma(p) = \frac{p^2}{2m} - \sigma \mu_B B.$$

    Wobei μ_B das Bohr'sche Magneton ist. Für beide Spineinstellungen ergeben sich damit unterschiedliche Besetzungszahlen $\langle n_\sigma(p)\rangle$ bei gleichem chemischen Potential μ. Die Magnetisierung und Suszeptibilität sind definiert durch

    $$M = \mu_B \left(\langle N_+ \rangle - \langle N_- \rangle \right) \ \text{mit}\ N_\sigma = \sum_p n_\sigma(p)$$

    und

    $$\chi = \chi(T, B) = \left.\frac{\partial M}{\partial B}\right|_{T,N}$$

    (a) Zeigen Sie $\chi(T, B = 0) = \mu_B^2 \int_{-\infty}^{\infty} d\epsilon\, \Omega'(\epsilon)\, n(\epsilon)$, wobei $\Omega(\epsilon)$ die Zustandsdichte und $n(\epsilon)$ die Fermiverteilung zum chemischen Potential $\mu(T)$ ist.

    (b) Zeigen Sie mit Hilfe der Sommerfeldentwicklung $\mu(T) = \epsilon_F - \frac{\pi^2 k_B^2 T^2}{12\epsilon_F}$ für ein Elektronengas mit $\epsilon = \frac{p^2}{2m}$ und Fermienergie ϵ_F.
    Hinweis: Drücken Sie die Zustandsdichte $\Omega(\epsilon)$ durch die Energie ϵ, die Fermienergie ϵ_F und die Teilchenzahl N aus.

    (c) Entwickeln Sie mit der Sommerfeld'schen Methode $\chi(T, 0)$ bis zur Ordnung T^2. Die Gesamtteilchenzahl N ist natürlich vorgegeben, sodass die in Aufgabenteil (b) berechnete Temperaturabhängigkeit von μ zu berücksichtigen ist.

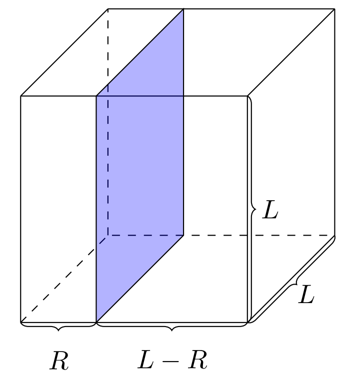
Bitte wenden! →

52. **Nullpunktsenergie des Vakuums und der Casimir-Effekt (8 Punkte)**

In der Vorlesung wurde die Nullpunktsenergie des Photonengases vernachlässigt. Wir wollen zeigen, dass diese Energie zu einem observablen Effekt führt. Betrachten Sie dazu einen leeren (würfelförmigen) Kasten mit Seitenlängen L und periodischen Randbedingungen. Der Hamilton-Operator des Photonengases mit Nullpunktsenergie lautet:

$$\widehat{H} = \sum_{\vec{k},\lambda} \hbar\omega_k \left(n_{\vec{k},\lambda} + \frac{1}{2} \right)$$

Dabei ist $\hbar\omega_k$ die Energie eines Photons und $n_{\vec{k},\lambda}$ die Besetzungszahl der Photonenmode mit Wellenvektor $\vec{k}$ und Polarisation λ.



(a) Berechnen Sie die Nullpunktsenergie W_L des Kastens, indem Sie über alle $\vec{k}$ Zustände summieren. Beachten Sie hierbei, dass es jeweils zwei Polarisationszustände gibt. Mit $L \to \infty$ liegen die einzelnen $\vec{k}$ Vektoren dicht, so dass Sie von der Summation zur Integration übergehen können.

Nun wird der Kasten geteilt, indem an Position R eine leitende Platte eingebracht wird. Dabei soll R im Weiteren einen festen Wert besitzen und gleichzeitig $L \to \infty$ gelten.

(b) Berechnen Sie wie oben die Nullpunktsenergie W_{L-R} des Anteils mit Länge $L - R$.

(c) Berechnen Sie außerdem die Nullpunktsenergie W_R des Anteils mit Kantenlänge R. Hierbei ist zu beachten, dass R endlich bleiben soll, also die Summation nicht (ohne weiteres) durch eine Integration ausgedrückt werden kann.

(d) Berechnen Sie den Energiegewinn beim Einbringen der Platte $\Delta W = W_L - (W_{L-R} + W_R)$. Nach geeigneter Umformung sollten Sie

$$\Delta W = -2\frac{\pi^2 \hbar c L^2}{R^3} \int_0^\infty \mathrm{d}x \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \sqrt{x + n^2} - \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\omega \sqrt{x + \omega^2} \right)$$

erhalten.

Diese Differenz zweier divergierender Ausdrücke lässt sich auswerten und man erhält ein nicht divergierendes Ergebnis:

$$\Delta W = \frac{1}{720} \frac{\pi^2 \hbar c L^2}{R^3}$$

(e) Berechnen Sie die Kraft auf die leitende Platte.

Eine sich im Vakuum befindende leitende Platte erfährt demnach eine Kraft, die nur vom Abstand und von den universellen Konstanten $\hbar$ und c abhängt. Sie hängt nicht von der Elementarladung e ab, welche ein Maß für die Kopplung des elektrischen Feldes an Materie ist.