Technische Universität Braunschweig

Prof. Dr. U. Motschmann
Dr. M. Feyerabend

ELEKTRODYNAMIK SS 2019

6. Übungsblatt — Abgabe: 23 Mai 2019 bis 9.45 Uhr im Kasten vor A317

Fragen zu den Aufgaben: Moritz Feyerabend, Raum 3.317, Tel.: 391-5187, m.feyerabend@tu-bs.de

13. **Fresnelsche Formeln** **(20 Punkte)**

Eine ebene elektromagnetische Welle

$$\underline{E} = \underline{E}_0 \, e^{i(\underline{k}\cdot\underline{x}-\omega t)} \quad ; \quad \underline{B} = \frac{1}{\omega}\,\underline{k}\times\underline{E}$$

treffe bei $x_3 = 0$ auf die ebene Grenzfläche zwischen zwei homogenen isotropen Isolatoren mit den Permittivitätszahlen $\epsilon_1 \neq 1$ und $\epsilon_2 \neq 1$ sowie den Permeabilitätszahlen $\mu_1 = \mu_2 = 1$. Der Normalenvektor der Grenzfläche sei $\underline{e}_3$. Die einfallende Welle komme aus dem Medium 1 und breite sich in der $x_1 - x_3$-Ebene aus.

(a) Welche Randbedingungen müssen die Felder $\underline{E}, \underline{D}, \underline{H}, \underline{B}$ bei $x_3 = 0$ erfüllen?

(b) Verwenden Sie für die reflektierte und die transmittierte Welle den Ansatz

$$\underline{E}^{R,T} = \underline{E}_0^{R,T}\, e^{i(\underline{k}^{R,T}\cdot\underline{x}-\omega^{R,T} t)} \quad .$$

Geben Sie die Dispersionsbeziehung $\omega(k)$ in beiden Medien an. Zeigen Sie die folgenden Relationen:

$$\omega = \omega^R = \omega^T \tag{1}$$

$$|\underline{k}^R| = |\underline{k}| \quad ; \qquad |\underline{k}^T| = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}}|\underline{k}| \tag{2}$$

$$k_2 = k_2^T = k_2^R = 0 \quad ; \qquad k_1 = k_1^T = k_1^R \quad . \tag{3}$$

(c) Nutzen Sie diese Beziehungen aus, um das Reflexionsgesetz ($k_3^R = -k_3$) und das Snelliussche Brechungsgesetz herzuleiten.

(d) Folgern Sie aus den Maxwellschen Gleichungen, dass es zwei unabhängige Sätze von Lösungen gibt:

$$\mathrm{TE-Welle}: \quad \{E_2, B_1, B_3\} \qquad ; \qquad \mathrm{TM-Welle}: \quad \{B_2, E_1, E_3\}$$

(TE: transversal-elektrische Welle, TM: transversal-magnetische Welle).

(e) Formulieren Sie alle Randbedingungen aus Aufgabenteil (a) so, dass sich Bestimmungsgleichungen für die Amplituden $\underline{E}_0^R$ und $\underline{E}_0^T$ der reflektierten und der transmittierten Welle ergeben. Ermitteln Sie für die TM-Welle die Verhältnisse $t = |\underline{E}_0^T|/|\underline{E}_0|$ und $r = |\underline{E}_0^R|/|\underline{E}_0|$ und stellen Sie diese als Funktion von α (Einfallswinkel) und von ϵ_1 bzw. ϵ_2 dar. Plotten Sie $R = r^2$ und $T = 1 - R$ als Funktion des Einfallswinkels für $\epsilon_1 = 2, \epsilon_2 = 4$ und $\epsilon_1 = 2, \epsilon_2 = 1.5$. Diskutieren Sie den Verlauf.

Bitte wenden ⟶

(f) In Teilaufgabe (e) sollte sich für die reflektierte Welle

$$\frac{E_0^R}{E_0} = \frac{\epsilon_2 \cos\alpha - \sqrt{\epsilon_1}\sqrt{\epsilon_2 - \epsilon_1 \sin^2\alpha}}{\epsilon_2 \cos\alpha + \sqrt{\epsilon_1}\sqrt{\epsilon_2 - \epsilon_1 \sin^2\alpha}} \tag{4}$$

ergeben, wobei α den Einfallswinkel der Welle bezeichnet. Bestimmen Sie aus dieser Beziehung den *Brewster-Winkel* α_B. Das ist derjenige Einfallswinkel, bei dem die reflektierte Welle verschwindet.

14. Zusatzaufgabe **(8 Zusatzpunkte)**

Ausgehend von den Ergebnissen in Aufgabe 13:

(a) Nehmen Sie an, eine beliebig polarisierte Welle falle unter dem Brewster-Winkel α_B auf die Grenzfläche ein. Welche Polarisation beobachtet man dann im reflektierten Strahl und in welche Richtung zeigt $\underline{E}^R$?

(b) Betrachten Sie den Fall, dass das Licht vom optisch dichteren auf das optisch dünnere Medium einfällt ($\epsilon_2 < \epsilon_1$). Bestimmen Sie denjenigen Winkel α_{total}, ab dem Totalreflexion eintritt. Zeigen Sie, dass k_3^T für $\alpha > \alpha_{total}$ imaginär wird und dass die reflektierte Welle und die transmittierte Welle im Fall der Totalreflexion jeweils eine Phasenverschiebung δ^R, δ^T bezogen auf die einfallende Welle aufweisen. Ermitteln Sie δ^R und δ^T als Funktion von $\epsilon_1, \epsilon_2, \alpha$. Geben Sie reelle Lösungen für $\underline{E}^T(\underline{x}, t)$ und $\underline{B}^T(\underline{x}, t)$ für $\alpha > \alpha_{total}$ an. Berechnen Sie im Bereich der Totalreflexion den Poynting-Vektor $\underline{\Pi}^T$ im Medium 2 sowie den zeitlichen Mittelwert von Π_z^T.
Hinweis: bei der Mittelwertbildung können Sie sich auf die Stelle $x_1 = 0$ beschränken.