



11. Dipolstrahlung

(16 Punkte)

In der Vorlesung (Kapitel II, Abschnitt 10) wurde die Reihenentwicklung des retardierten Vektorpotentials

$$\underline{A}(\underline{x}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3x' \frac{\underline{j}(\underline{x}', t - \frac{|\underline{x} - \underline{x}'|}{c})}{|\underline{x} - \underline{x}'|} \quad (1)$$

für große Entfernungen r von einer inselartigen Quellverteilung $\rho(\underline{x}', t), \underline{j}(\underline{x}', t)$ diskutiert. Im folgenden betrachten wir lediglich den ersten Summanden dieser Entwicklung, wobei wir uns auf das Vakuum ($\mu = \epsilon = 1$) beschränken:

$$\underline{A}_1(\underline{x}, t) = \frac{\mu_0 \dot{\underline{p}}(t - \frac{r}{c})}{4\pi r} \quad \text{mit} \quad \underline{p}(t) = \int d^3x' \underline{x}' \rho(\underline{x}', t) \quad . \quad (2)$$

Dieser Term soll nun für den Spezialfall einer zeitlich oszillierenden Ladungs- und Stromverteilung

$$\rho(\underline{x}, t) = \rho(\underline{x}) \exp(-i\omega t) \quad \text{bzw.} \quad \underline{j}(\underline{x}, t) = \underline{j}(\underline{x}) \exp(-i\omega t) \quad (3)$$

explizit ausgewertet und diskutiert werden. Dies führt zur sog. *Dipolstrahlung*.

(a) Zeigen Sie, dass die Auswertung von Gl. (2) auf die Form

$$\underline{A}_1(\underline{x}, t) = \underline{A}_1(\underline{x}) \exp(-i\omega t) \quad \text{mit} \quad \underline{A}_1(\underline{x}) = -i\omega \frac{\mu_0}{4\pi} \underline{\mathcal{P}} \frac{\exp(ikr)}{r} \quad (4)$$

und dem zeitunabhängigen Dipolmoment

$$\underline{\mathcal{P}} = \int d^3x' \underline{x}' \rho(\underline{x}') \quad (5)$$

führt. Die Wellenzahl $k = 2\pi/\lambda$ ist wiederum durch $\omega = ck$ festgelegt.

(b) Bestimmen Sie mittels Gl. (4) die magnetische Induktion $\underline{B}(\underline{x}, t)$ und ermitteln Sie damit aus dem Gesetz von Ampère die elektrische Feldstärke $\underline{E}_1(\underline{x}, t) = \underline{E}_1(\underline{x}) \exp(-i\omega t)$ für jeweils große Entfernungen von der Quellverteilung. Sie sollten dann in dieser s.g. Strahlungsnäherung

$$\underline{B}_1(\underline{x}) \approx \frac{\mu_0}{4\pi} ck^2 \frac{\exp(ikr)}{r} \underline{e}_r \times \underline{\mathcal{P}} \quad \text{sowie} \quad \underline{E}_1(\underline{x}) \approx c \underline{B}_1(\underline{x}) \times \underline{e}_r \quad (6)$$

erhalten, wobei $\underline{e}_r = \frac{\underline{x}}{r}$. Diskutieren Sie den Feldverlauf von \underline{E}_1 und \underline{B}_1 . Gehen Sie insbesondere auf die Abnahme der Feldstärke für große r ein.

Bitte wenden →

- (c) Bestimmen Sie den zeitlichen Mittelwert des zu \underline{E}_1 und \underline{B}_1 gehörenden Poynting-Vektors $\underline{\Pi}_1$. Machen Sie sich dafür zunächst klar, dass dieser Mittelwert in der Form

$$\langle \underline{\Pi}_1 \rangle = \frac{1}{2\mu_0} \operatorname{Re} \{ \underline{E}_1^*(\underline{x}) \times \underline{B}_1(\underline{x}) \} = \frac{1}{2\mu_0} \operatorname{Re} \{ \underline{E}_1(\underline{x}) \times \underline{B}_1^*(\underline{x}) \} \quad (7)$$

geschrieben werden kann. Der Stern bezeichnet die komplexe Konjugation. Diskutieren Sie die Abhängigkeit des Betrages $|\langle \underline{\Pi}_1 \rangle|$ vom Winkel zwischen \underline{e}_r und $\underline{\mathcal{P}}$ (Skizze!).

- (d) Berechnen Sie die Leistung (gesamter Energiefluss I), die im zeitlichen Mittel abgestrahlt wird.

12. Sendeantenne Dipolstrahlung

(4 Punkte)

Als Modell für eine Sendeantenne betrachten wir einen unendlich dünnen, geraden Leiter entlang der x_3 -Achse, für dessen Ausdehnung $-L/2 < x_3 < +L/2$ gilt. In diesem Leiter fließt ein Strom mit harmonischer Zeitabhängigkeit, dessen Amplitude in der Mitte I_0 ist und zu den Enden hin linear auf null abfällt.

- (a) Geben Sie die Stromdichte $\underline{j}(\underline{x}, t)$ für diesen Strom an und ermitteln Sie aus der Kontinuitätsgleichung die Ladungsdichte $\rho(\underline{x}, t)$.
- (b) Berechnen Sie das elektrische Dipolmoment der Antenne und daraus die gesamte im Mittel abgestrahlte Leistung in Abhängigkeit von L und I_0 .

Hinweis: Für (b) können Sie auf Ihr Ergebnis aus der Aufgabe 11(d) zurückgreifen.