



5. Kugelschale im homogenen elektrischen Feld

(9 Punkte)

Wir wollen nun eine Anwendung der Legendre-Polynome kennen lernen. Dazu betrachten wir eine leitende dünne Kugelschale mit Radius R in einem statischen elektrischen Feld, das in grösserer Entfernung von der Kugel homogen ist,

$$\underline{E}(r \rightarrow \infty) = \underline{E}_\infty = E_0 \underline{e}_3 \quad . \quad (1)$$

Der Koordinatenursprung soll im Mittelpunkt der Kugel liegen. Bestimmen Sie nun das elektrische Potential $\Phi(\underline{x})$ inner- und außerhalb der Kugelschale.

- (a) Begründen Sie zunächst, dass sich die allgemeine Lösung für $\Phi(\underline{x})$ schreiben lässt als

$$\Phi(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(a_l r^l + \frac{b_l}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos \theta) \quad . \quad (2)$$

Das Problem besteht jetzt in der Bestimmung der Entwicklungskoeffizienten a_l, b_l aus den Randbedingungen. Die Entwicklungskoeffizienten a_l, b_l im Innenraum ($r < R$) unterscheiden sich natürlich von denen im Außenraum ($r > R$).

- (b) Auf der Kugeloberfläche sei das Potential konstant,

$$\Phi(R, \theta) = \Phi_0 \quad . \quad (3)$$

Geben Sie das Potential und das elektrische Feld im Inneren der Kugel an.

- (c) Geben Sie das Potential $\Phi(r, \theta)$ im Außenraum der Kugelschale an.
(d) Diskutieren Sie den Verlauf der Feldlinien und der Äquipotentiallinien und skizzieren Sie diese.

6. Elektrischer Dipol

(8 Punkte)

Ein elektrischer Dipol im Vakuum werde konstruiert durch Positionierung einer positiven Punktladung $(+Q)$ bei $\underline{x} = +a\underline{e}_1$ und einer negativen Punktladung $(-Q)$ bei $\underline{x} = -a\underline{e}_1$ mit $Q > 0$, $a > 0$.

- (a) Stellen Sie die Formel für die Ladungsdichte $\rho(\underline{x})$ auf.
(b) Berechnen Sie das Skalarpotential $\phi(\underline{x})$ über das Integral für das Coulomb-Potential.
(c) Bestimmen Sie die elektrische Feldstärke $\underline{E}(\underline{x})$.
(d) Skizzieren oder plotten Sie die $\underline{E}$ -Feldlinien und die Äquipotentialflächen, d.h. Flächen, für die gilt $\phi = \text{const.}$
(e) Beweisen Sie, dass für große Entfernungen vom Dipol ($r \gg a$) gilt

$$\phi(\underline{x}) = \frac{2Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{ax_1}{r^3} \quad (4)$$

- (f) Bestimmen Sie für dieses Fernfeld ($r \gg a$) wiederum die elektrische Feldstärke $\underline{E}(\underline{x})$.

7. Feld eines magnetischen Dipols

(3 Punkte)

Das Vektorpotential eines magnetischen Dipols ist gegeben durch

$$\underline{A}(\underline{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\underline{m} \times \underline{x}}{r^3} \quad . \quad (5)$$

$\underline{m}$ ist das magnetische Dipolmoment.

(a) Zeigen Sie, dass sich die magnetische Induktion eines Dipols dann schreiben lässt als

$$\underline{B}(\underline{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3\underline{x}(\underline{m} \cdot \underline{x}) - \underline{m}r^2}{r^5} \quad . \quad (6)$$

(b) Skizzieren oder plotten Sie die Feldlinien von $\underline{B}(\underline{x})$.