Technische Universität Braunschweig

INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

Prof. Dr. U. Motschmann
Dr. M. Feyerabend

ELEKTRODYNAMIK SS 2019

2. Übungsblatt Abgabe: 25 April 2019 bis 9.45 Uhr im Kasten vor A317

Fragen zu den Aufgaben: Moritz Feyerabend, Raum 3.317, Tel.: 391-5187, m.feyerabend@tu-bs.de

3. Elektromagnetische Potentiale (14 Punkte)

Das Rechnen mit Potentialen soll trainiert werden.

Bereitstellung von Relationen für zwei stetig differenzierbare Vektorfelder $\underline{A}, \underline{B} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

i. $\partial_{\underline{x}} (\underline{A} \cdot \underline{B}) = (\underline{B} \cdot \partial_{\underline{x}})\ \underline{A} + (\underline{A} \cdot \partial_{\underline{x}})\ \underline{B} + \underline{B} \times (\partial_{\underline{x}} \times \underline{A}) + \underline{A} \times (\partial_{\underline{x}} \times \underline{B})$;

ii. $\partial_{\underline{x}} \times (\underline{A} \times \underline{B}) = (\underline{B} \cdot \partial_{\underline{x}})\ \underline{A} - (\underline{A} \cdot \partial_{\underline{x}})\ \underline{B} + \underline{A} (\partial_{\underline{x}} \cdot \underline{B}) - \underline{B} (\partial_{\underline{x}} \cdot \underline{A})$.

Dabei bezeichnet $\underline{A} \cdot \partial_{\underline{x}}$ den Differentialoperator, der sich durch das formale Skalarprodukt des Vektorfeldes $\underline{A}$ mit $\partial_{\underline{x}}$ ergibt.

(a) Betrachten Sie die zeitunabhängige (statische) Form des Faraday-Gesetzes:

$$\partial_{\underline{x}} \times \underline{E} = 0 \quad . \tag{1}$$

Zeigen Sie unter Benutzung von Komponentenschreibweise und Summenkonvention, dass diese Gleichung durch den Ansatz

$$\underline{E} = -\partial_{\underline{x}} \Phi \quad \text{mit} \quad \Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \tag{2}$$

gelöst wird.

(b) Zeigen Sie, dass Φ in der Form

$$\Phi (\underline{x}) = - \int_{\infty}^{1} \underline{E} (\tau \underline{x}) \cdot \underline{x}\, \mathrm{d}\tau \tag{3}$$

dargestellt werden kann, wenn die elektrische Feldstärke im Unendlichen hinreichend schnell verschwindet.

(c) Betrachten Sie die elektrische Feldstärke einer Punktladung Q im Ursprung $\underline{x} = 0$ und im Vakuum:

$$\underline{E}(\underline{x}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \frac{\underline{x}}{r} \quad , \quad r = |\underline{x}| \tag{4}$$

Skizzieren Sie $\underline{E}$. Überzeugen Sie sich davon, dass $\underline{E}$ wirbelfrei ist.

(d) Für die Punktladung Q im Ursprung und im Vakuum gilt das Potential

$$\Phi(\underline{x}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \quad . \tag{5}$$

Bestätigen Sie dieses Ergebnis mit Hilfe der Formel aus (b), indem Sie $\underline{E}$ aus (c) einsetzen.

Bitte wenden ⟶

(e) Magnetfelder haben keine Quellen:

$$\partial_{\underline{x}} \cdot \underline{B} = 0 \quad . \tag{6}$$

Zeigen Sie unter Benutzung von Komponentenschreibweise und Summenkonvention, dass diese Gleichung durch den Ansatz

$$\underline{B} = \partial_{\underline{x}} \times \underline{A} \quad \text{mit} \quad \underline{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \tag{7}$$

gelöst wird. Das Feld $\underline{A}$ ist das sog. *Vektorpotential*.

(f) Zeigen Sie, dass $\underline{A}$ in der Form

$$\underline{A}(\underline{x}) = \int_0^1 \underline{B}\,(\tau \underline{x}) \times (\tau \underline{x})\,\mathrm{d}\tau \tag{8}$$

dargestellt werden kann, wobei das Integral über den $\mathbb{R}^3$-wertigen Integranden komponentenweise aufzufassen ist.

(g) Betrachten Sie die magnetische Induktion

$$\underline{B} = (x_1 x_3 - 2x_3)\,\underline{e}_1 - x_2 x_3 \underline{e}_2 + x_1 \underline{e}_3 \quad . \tag{9}$$

Überzeugen Sie sich zunächst davon, dass $\underline{B}$ quellenfrei ist.

(h) Bestimmen Sie ein geeignetes Vektorpotential $\underline{A}$ mit der Formel aus (f) für die magnetische Induktion aus (g).

4. **Feld einer elektrischen Punktladung** **(6 Punkte)**

(a) Leiten Sie im zeitunabhängigen Fall und im Vakuum die Poisson-Gleichung

$$\partial_{\underline{x}}^2 \Phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{10}$$

aus dem Faraday- und dem Gauss-Gesetz ab.

(b) Für eine Punktladung Q im Ursprung gilt

$$\rho(\underline{x}) = Q\delta(\underline{x}) \tag{11}$$

und die Poisson-Gleichung ergibt sich zu

$$\partial_{\underline{x}}^2 \Phi = -\frac{Q}{\epsilon_0}\delta(\underline{x}) \quad . \tag{12}$$

Überprüfen Sie durch Einsetzen, inwieweit das in Aufgabe 3(d) angegebene Potential die Poisson-Gleichung erfüllt. Auf welches Problem stoßen Sie?