INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

Technische Universität Braunschweig

Prof. Dr. U. Motschmann
Dr. M. Feyerabend

RECHENMETHODEN I — WS 2018/19

Klausurvorbereitung — Abgabe: keine Abgabe

Fragen zu den Aufgaben: Moritz Feyerabend, Raum 3.317, Tel.: 391-5187, m.feyerabend@tu-bs.de

1. **Wissensfragen**

   (a) Zeigen Sie, dass die Rotation eines Vektorfeldes divergenzfrei ist.

   (b) Geben Sie eine physikalische Interpretation des Gradienten und erläutern Sie diese anhand eines Beispiels.

   (c) Geben Sie die Taylorentwicklung für eine Funktion $f(x) = \tan(x)$ um den Punkt $x_0 = 0$ bis zur 3. Ordnung an.

   (d) Wie lautet der Satz von Schwarz? Geben Sie die Formel an und erläutern Sie diese.

2. **Extremwertproblem**

   Bestimmen Sie die Position und den Wert des Extremums der Funktion

   $$f(x, y, z) = (x-1)^2 + y^2 + z^2$$

   unter der Nebenbedingung

   $$x + y - z = 0 \quad .$$

   Benutzen Sie dazu die Methode der Lagrangeschen Multiplikatoren. Die Art der Extremstelle *soll* nicht untersucht werden.

3. **Integrale**

   (a) Bestimmen Sie das folgende Integral

   $$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x-1} - \sqrt{x-2}}$$

   (b) Gegeben sei ein Zylinder $\mathcal{Z} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, \sqrt{x^2+y^2} \leq R,\, -\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2}\right\}$ mit der Massendichte $\rho(x, y, z) = \rho_0 \sqrt{x^2+y^2}$, $\rho_0 > 0$. Bestimmen Sie die Gesamtmasse des Zylinders.

Bitte wenden $\longrightarrow$

4. **Integralsatz von Gauß**

Wir betrachten das Vektorfeld

$$\underline{A}(x, y, z) = \begin{pmatrix} xz \\ yz^2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad .$$

(a) Berechnen Sie die Divergenz des Vektorfeldes $\underline{A}$.

(b) Berechnen Sie für den Würfel $\mathcal{W} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, |x| \leq 1,\ |y| \leq 1,\ |z| \leq 1\right\}$ explizit das Oberflächenintegral

$$\int_{(\mathcal{W})} \underline{A} \cdot \mathrm{d}\underline{O} \quad ,$$

d.h. den Fluss des Vektorfeldes $\underline{A}$ durch die Oberfläche des Würfels.

(c) Wie lautet der Integralsatz von Gauß allgemein? (Angabe der Formel und kurze Erläuterung)

(d) Verifizieren Sie den Integralsatz von Gauß für das Vektorfeld $\underline{A}$ und den Würfel aus (b).

5. **Konservatives Vektorfeld**

Wir betrachten das Vektorfeld

$$\underline{A}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2xye^{-z^2} + (2-\lambda)z^3\cos(y^2) \\ x^2e^{-z^2} + (\lambda-3)xyz^3\sin(y^2) \\ (\lambda-3)x^2yze^{-z^2} + 3xz^2\cos(y^2) \end{pmatrix} \quad ,$$

wobei $\lambda \in \mathbb{R}$ eine Konstante ist.

(a) Bestimmen Sie λ so, dass $\underline{A}$ rotationsfrei ist.

(b) Bestimmen Sie für den in (a) ermittelten Wert von λ ein Potential des Vektorfeldes $\underline{A}$.

6. **Differentialgleichung**

Die Bewegungsgleichung eines angetriebenen, gedämpften Oszillators lautet

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = f(t) \quad , \quad x = x(t) \quad .$$

Dabei sind γ und ω positive Konstanten.

In dieser Aufgabe beschränken wir uns auf den Fall $\gamma > \omega_0$.

(a) Bestimmen Sie zunächst für $f(t) = 0$ die allgemeine Lösung $x(t)$ der Bewegungsgleichung und skizzieren Sie diese.

(b) Bestimmen Sie nun für $f(t) = f_0\cos(\Omega t)$ die allgemeine Lösung von $x(t)$ der Bewegungsgleichung. Verwenden Sie dabei zum Auffinden einer speziellen Lösung $x_p(t)$ der inhomogenen Differentialgleichung den Ansatz

$$x_p(t) = a\sin(\Omega t) + b\cos(\Omega t) \quad .$$

(c) Geben Sie $x(t)$ für die Anfangsbedingungen $x(t=0) = x_0$ und $\dot{x}(t=0) = 0$ an.