INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG

Prof. Dr. W. Brenig
Dipl.-Phys. S. Grossjohann

Rechenmethoden I — WiSe 2006/2007

8. Übungsblatt — Abgabe: **16.01.07 bis 11:25h, HA-Kiste bei A316**

1. **Invertieren von Matrizen und Determinantenbildung (6 Punkte)**
   Gegeben sei folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 &= 1 \\ 2x_1 - 2x_2 + 2x_4 &= 2 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 &= 3 \\ x_1 - x_4 &= 4 \end{aligned}$$

   Bringen Sie das Gleichungssystem in Matrixdarstellung $A\vec{x} = \vec{y}$

   (a) Berechnen Sie die Determinante von $A$. Es ist übrigens geschickt, sich für die Berechnung nach Laplaceschem Entwicklungssatz immer diejenige Zeile/Spalte mit den meisten Nullen zu wählen. Warum muss $\det(A) \neq 0$ gelten für eine eindeutige Lösung des Gleichungssystems (kurzer Antwortsatz)?

   (b) Lösen Sie das Gleichungssystem durch Invertieren von $A$, so dass der Lösungsvektor durch $\vec{x} = A^{-1}\vec{y}$ gegeben ist.

2. **Ein paar Rechenregeln zu Matrizen (4 Punkte)**
   Beweisen Sie folgende Rechenregeln:

   (a) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

   (b) $(AB)^T = B^T A^T$

   (c) A sei obere Dreiecksmatrix, dann folgt: $\det(A) = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$

   (d) Multipliziert man eine Zeile/Spalte einer Matrix $A$ mit $\lambda$, so folgt: $\det(A) \to \lambda \det(A)$

3. **Basiswechsel (4 Punkte)**
   Gegeben Sei Ihnen die übliche Basis $B$ des $\mathbb{R}^3$: $\{\vec{e}_1 = (1,0,0), \vec{e}_2 = (0,1,0), \vec{e}_3 = (0,0,1)\}$.

   (a) Transformieren Sie die Basisvektoren in eine neue Basis $B'$, bei denen $\vec{e}_1$ und $\vec{e}_2$ um $\pi/4$ in der XY-Ebene (also um $\vec{e}_3$) gedreht worden sind[1]. Geben Sie dazu die Transformationsmatrix des Basiswechsels an.

   (b) Stellen Sie den Vektor $\vec{x} = (1,2,3)$ zur Basis $B$ in der neuen Basis $B'$ dar.

4. **Diagonalisieren von Matrizen (6 Punkte)**

   (a) Für welche $\varphi$ ist die Drehmatrix

$$M_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

   mit reellen Eigenwerten diagonalisierbar?

   (b) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom sowie die Eigenwerte der Koeffizientenmatrix $A$ aus Aufgabe 1.

[1] Etwas ähnliches wird Ihnen beim nächsten Mal bei der Behandlung des Kreisels in der theoretischen Mechanik begegnen, bei dem Sie vom ortsfesten Koordinatensystem des Betrachters in das des rotierenden Kreisels transformieren.