INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG

Prof. Dr. W. Brenig
Dipl.-Phys. S. Grossjohann

Rechenmethoden I — WiSe 2006/2007

12. Übungsblatt — Abgabe: **13.02.07 bis 11:25h, HA-Kiste bei A316**

1. **Linien/Oberflächenintegrale (8 Punkte)**
   Gegeben sei das Vektorfeld $\underline{A} = (4y^2 + 3z, 8xy - 8z^3, -24yz^2 + 3x)$.

   (a) Berechnen Sie die Wegintegrale $I = \int \langle \underline{A} | d\underline{s} \rangle$ entlang folgender Wege (Wege = direkte Verbindungsgeraden genannter Punkte:

   $$\begin{aligned} C_1 &: (0,0,0) \to (1,0,0) \to (1,0,1) \\ C_2 &: (0,0,0) \to (1,0,1) \end{aligned}$$

   (b) Zeigen Sie, dass Wegintegrale über konservative Kraftfelder $\underline{F}$ (d.h. rot$\underline{F} = 0$) wegunabhängig sind und das demzufolge für geschlossene Wegintegrale immer gelten muss:

   $$\oint \underline{A} \cdot d\underline{s} = 0.$$

   Ist $\underline{A}$ ein solches Kraftfeld?

2. **Gaußscher Integralsatz (12 Punkte)**
   Gegeben sei das Vektorfeld $\underline{A} = Q r^\alpha \underline{r}$ mit $\underline{r} = (x, y, z)$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ und $\alpha \in \mathbb{Z}$.

   (a) Berechnen Sie div$\underline{A}$.

   (b) Berechnen Sie das Volumenintegral

   $$I_1 = \iiint \mathrm{div}\underline{A}\, dV$$

   über eine Kugel mit dem Radius R um den Koordinatenursprung. Verwenden Sie Kugelkoordinaten $x = r \sin\vartheta \cos\varphi$, $y = r \sin\vartheta \sin\varphi$ und $z = r\cos\vartheta$.

   (c) Berechnen Sie den Fluss I_2 von $\underline{A}$ durch die Oberfläche dieser Kugel:

   $$I_2 = \iint \underline{A} \cdot d\underline{f}.$$

   Dabei ist $d\underline{f} = R^2 (\underline{r}/r) \sin\vartheta d\vartheta d\varphi$.

   (d) Vergleichen Sie I_1 und I_2. Für welche α sind I_1, I_2 unabhängig von R? Um welche physikalischen Felder handelt es sich hierbei?

3. **Integrale (Übung, keine Abgabe)**
   Berechnen Sie die folgenden Integrale:

   (a) $\int 3x^2 e^{x^3} dx$

   (b) $\int 2x \cot x^2 dx$

   (c) $\int e^x \sin x dx$

   (d) $\int \frac{x^3 - 2x^2 + x + 5}{x^2 - 1} dx$

4. **Taylorentwicklung (Übung, keine Abgabe)**

   (a) Entwickeln Sie $f(x) = \ln x$ in ihre Taylorreihe um $x_0 = 1$ bis zur zweiten Ordnung.

   (b) Gegeben sei Ihnen die Funktion

   $$g(x, y) = e^x \sin y.$$

   Diese Funktion hat an der Stelle $(x = 1, y = \pi)$ den Funktionswert 0, an der Stelle $(x = 1.08, y = \pi + 0.08)$ den Funktionswert $-0.2353\ldots$. Entwickeln Sie die Funktion $g(x, y)$ nun in eine Taylorreihe um $(x = 1, y = \pi)$ bis zu einer Ordnung, die Ihnen das bekannte Ergebnis bei $(x = 1.08, y = \pi + 0.08)$ bis einschließlich der dritten Nachkommastelle genau angibt.

5. **Gleichungssysteme (Übung, keine Abgabe)**
   Gegeben Sei Ihnen folgendes Gleichungssystem:

   $$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 + 2x_3 &= 3 \\ x_2 + x_3 &= 1 \\ 3x_1 + 3x_2 &= 1 \end{aligned}$$

   (a) Zeigen Sie, dass das Gleichungssystem eine eindeutige Lösung besitzt.

   (b) Lösen Sie es durch das Gauß-Jordan Verfahren.

   (c) Lösen Sie es durch Invertierung der Koeffizientenmatrix.

   (d) Lösen Sie es durch Anwendung der Cramerschen Regel.

6. **Diagonalisierung einer Matrix (Übung, keine Abgabe)**
   Bestimmen Sie die Eigenwerte der Matrix

   $$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

   Geben Sie die Transformationsmatrix S an, welche A auf Diagonalform $D = S^{-1}AS$ bringt.

7. **div, rot, ... (Übung, keine Abgabe)**

   (a) Gegeben sei das Vektorfeld

   $$A = \begin{pmatrix} x^2 \sin y \\ xz^2 \\ y^2 \ln x \end{pmatrix}.$$

   Bestimmen Sie jeweils die Divergenz und die Rotation.

   (b) Wie nennt man ein Vektorfeld, dessen Rotation verschwindet? Ist $\underline{A}$ ein solches Feld? Welche Eigenschaften haben solche Vektorfelder (Kraftfelder) in der Physik?

   (c) Weisen Sie nach: Der Gradient eines skalaren Feldes ist wirbelfrei.