INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG

Prof. Dr. W. Brenig
Dipl.-Phys. S. Grossjohann

Rechenmethoden I — WiSe 2006/2007

10. Übungsblatt — Abgabe: **30.01.07 bis 11:25h, HA-Kiste bei A316**

1. **div, rot & grad (5 Punkte)**
   Sei Ψ ein skalares Feld, $\bar{A}$ und $\bar{B}$ seien Vektorfelder. Zeigen Sie:
   (a) $\mathrm{div}(\Psi\bar{A}) = \Psi\mathrm{div}\bar{A} + \bar{A}\cdot\mathrm{grad}\Psi$
   (b) $\mathrm{rot}(\Psi\bar{A}) = \Psi\mathrm{rot}\bar{A} - \bar{A}\times\mathrm{grad}\Psi$
   (c) $\mathrm{div}(\bar{A}\times\bar{B}) = \bar{B}\cdot\mathrm{rot}A - \bar{A}\cdot\mathrm{rot}B$

2. **Feld- und Niveaulinien (4 Punkte)**
   Gegeben sei die Funktion $\phi(x,y)$:
   $$\phi(x,y) = \frac{Q}{2r^3}(3\cos^2(\alpha) - 1)$$
   wobei $r = \sqrt{x^2+y^2}$ und α der Winkel zwischen $\vec{r} = (x,y)$ und der y-Achse ist. Bestimmen Sie $\bar{E} = -\mathrm{grad}\phi$, zeichnen Sie die Feldlinien von $\bar{E}$ und die Niveauflächen von ϕ (Äquipotentialflächen) in der x-y-Ebene. (ϕ ist ein Schnitt durch das elektrische Potential eines um die y-Achse rotationssymmetrischen Quadrupols und $\bar{E}$ sein elektrisches Feld.)

3. **Taylorentwicklung (5 Punkte)**
   Geben Sie die Taylorentwicklung nachfolgender Funktionen bis zur zweiten Ordnung um die angegebenen Aufpunkte an:
   (a) $f(x,y) = \frac{x^2}{y}$ um $(x_0,y_0) = (1,2)$
   (b) $g(x,y,z) = e^{2x-yz^2}$ um $(x_0,y_0,z_0) = (0,0,0)$

4. **Gradient in Polarkoordinaten (6 Punkte)**
   Sie kennen die verschiedenen Differentialoperatoren div, rot und grad bereits aus der Vorlesung für das kartesische Koordinatensystem. Wir führen nun anstelle der kartesischen Koordinaten Polarkoordinaten ein, d.h.:
   $$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \to \vec{r} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ z \end{pmatrix}.$$
   (a) Geben Sie die normierten Basisvektoren $(\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z)$ des neuen Koordinatensystems an und zeigen Sie, dass diese ebenso ein Orthonormalsystem bilden.
   (b) Stellen Sie **grad** in Polarkoordinaten dar.