INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG

Prof. Dr. W. Brenig
Dipl.-Phys. S. Grossjohann

Rechenmethoden I WiSe 2006/2007

9. Übungsblatt Abgabe: **23.01.07 bis 11:25h, HA-Kiste bei A316**

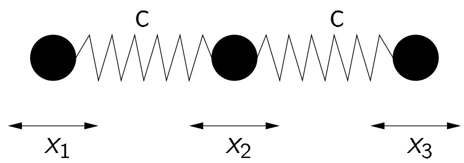
1. **Die Cramers Regel (7 Punkte)**
Die Cramers-Regel ist eine mathematische Formel zur Lösung eindeutiger, linearer Gleichungssysteme $A\vec{x} = \vec{y}$. Dabei ist A die Koeffizientenmatrix des linearen Gleichungssystems, $\vec{x}$ der Variablenvektor und $\vec{y}$ der Lösungsvektor. Die Cramers Regel gibt dann die Komponenten des Variablenvektors an mit:
$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}.$$
Dabei ist A_i die Koeffizientenmatrix, deren i-te Spalte durch den Lösungsvektor $\vec{y}$ ersetzt wurde.

   (a) Warum eignet sich die Formel nur zur Lösung eindeutiger Gleichungssysteme?

   (b) Beweisen Sie die Cramers Regel. Tip: Bilden Sie dazu das Matrixprodukt aus $A \cdot X_i = A_i$, wobei X_i die Einheitsmatrix ist, bei der die i-te Spalte durch den Variablenvektor $\vec{x}$ ersetzt wurde. Bilden Sie dann die Determinante auf beiden Seiten Ihrer Gleichung.

   (c) Lösen Sie das nachfolgende lineare Gleichungssystem mit der Cramers Regel:
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 4 \\ 3x_2 + 4x_3 &= 3 \\ -2x_1 - x_2 + x_3 &= -1. \end{aligned}$$

2. **Ein kleines Molekül (7 Punkte)**
Gegeben sei ein dreiatmoiges Kettenmolekül, welches aus Atomen der Masse m bestehe, verbunden durch Federn der Federkonstante c. Die Auslenkungen aus der Gleichgewichtslage seien mit x_j bezeichnet (siehe Skizze). Die Bewegungsgleichungen für das System lauten damit:
$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 &= c(x_1 - x_2) \\ m\ddot{x}_2 &= c(x_2 - x_1) + c(x_2 - x_3) \\ m\ddot{x}_3 &= c(x_3 - x_2). \end{aligned}$$



Mit Hilfe des Schwingungsansatzes $x_j = x_{j,0}e^{i\alpha t}$ führe man das Gleichungssystem in ein Eigenwertproblem über, bestimme die Eigenwerte $\lambda = \alpha^2$, und die dazugehörigen Eigenvektoren. Interpretieren Sie die Eigenschwingungsmoden graphisch und in Worten.

3. **Diagonalisierung (6 Punkte)**
Gegeben sei die Matrix
$$A = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}.$$

   (a) Zeigen Sie, dass die Matrix A hermitesch ist, d.h. $A = (A^T)^*$ (* = komplexe Konjugation).

   (b) Hermitesche Matrizen haben reelle Eigenwerte. Zeigen Sie dies am Beispiel von A.

   (c) Bestimmen und normieren Sie die Eigenvektoren von A. Geben Sie die Matrix S an, welche A auf Diagonalform D transformiert durch $D = S^{-1}AS$.