INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG

Prof. Dr. W. Brenig
Dipl.-Phys. S. Grossjohann

Rechenmethoden I — WiSe 2006/2007

8. Übungsblatt — Abgabe: **09.01.07 bis 11:25h, HA-Kiste bei A316**

1. **Ein bisschen Matrizenrechnung ... (3 Punkte)**
Gegeben sind die Matrizen $A \in \mathbb{M}(3x3,\mathbb{R})$, $B \in \mathbb{M}(2x3,\mathbb{R})$, $C \in \mathbb{M}(3x3,\mathbb{R})$ und $x \in \mathbb{M}(3x1,\mathbb{R})$:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}, \qquad x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$
Berechnen Sie:
(a) $B \cdot A$
(b) $\alpha A + \gamma C$
(c) $A \cdot C \cdot x$

2. **Gauß-Jordan-Elimination (5 Punkte)**
Bringen Sie das Gleichungssystem
$$\begin{aligned} 7x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 48 \\ 1x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= 43 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 &= 53 \end{aligned}$$
in Matrizenform und lösen Sie es mit dem Gauß-Jordan-Verfahren aus der Vorlesung.

3. **Dreh-Matrizen (6 Punkte)**
Drehungen in der Ebene lassen sich durch Matrizen der Form
$$M_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$
beschreiben.
(a) Überzeugen Sie sich davon, indem Sie M_φ auf einen Vektor $\in \mathbb{R}^2$ wirken lassen. Skizzieren Sie ein Beispiel.
(b) Zeigen Sie, dass die Menge aller Drehungen M_φ, $\varphi \in [0, 2\pi]$, zusammen mit der Matrizenmultiplikation eine Gruppe[1] bildet.

4. **Pauli-Matrizen (6 Punkte)**
In der Quantenmechanik werden Ihnen zur Beschreibung des Spins eines Elektrons die sogenannten Pauli-Matrizen begegnen:
$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$
(a) Zeigen Sie, dass $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ zusammen mit der Einheitsmatrix E eine Basis des Vektorraumes der 2x2-Matrizen bilden.
(b) Matrixmultiplikation ist nicht kommutativ. Für die Paulimatrizen lässt sich jedoch folgende Beziehung angeben, die zu verifizieren ist: $[\sigma_l, \sigma_m] := \sigma_l\sigma_m - \sigma_m\sigma_l = 2i\epsilon_{lmn}\sigma_n$.

[1] Zu zeigen: Abgeschlossenheit, Assoziativität, neutrales Element, inverses Element.