

1. Gram-Schmidtsches Orthogonalisierungsverfahren

Das Gram-Schmidtsche Orthogonalisierungsverfahren ist ein Algorithmus, welches aus einer Basis von linear unabhängigen Vektoren ein Set neuer, orthogonaler Basisvektoren erzeugt (siehe Beispiel VL für $\mathbb{R}^2$). **Allgemein:** Es sei V_n ein beliebiger, n -dimensionaler euklidischer Vektorraum und die Vektoren $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n \in V_n$ seien linear unabhängig. Dann existiert ein Orthogonalsystem von Vektoren $\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n \in V_n$, welches auf folgende Weise konstruiert werden kann:

$$\vec{y}_1 = \vec{x}_1, \quad \vec{y}_k = \vec{x}_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\langle \vec{x}_k | \vec{y}_i \rangle}{\langle \vec{y}_i | \vec{y}_i \rangle} \vec{y}_i, \quad (k = 2, 3, \dots, n)$$

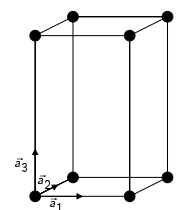
Gegeben seien Ihnen nun die folgenden 3 Vektoren $\in \mathbb{R}^3$:

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Diese bilden eine Basis des $\mathbb{R}^3$ (siehe Übungsblatt 5), sind aber nicht orthogonal. Verwenden Sie nun das Gram-Schmidtsche Orthogonalisierungsverfahren zur Erzeugung einer orthogonalen Basis. Normieren Sie ihre neuen Basisvektoren anschliessend.

2. Festkörper

In einem Festkörper sind die Atome in einem regelmässigen Gitter angeordnet, das sich z.B. durch Aneinandersetzen der abgebildeten Struktur (*Einheitszelle*) bilden lässt. Die Lage eines jeden Atoms kann durch Vielfaches der eingezeichneten Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ beschrieben werden. Diese seien durch $\vec{a}_1 = (3, 0, 0) \times 10^{-10}\text{m}$, $\vec{a}_2 = (2, 2, 0) \times 10^{-10}\text{m}$, $\vec{a}_3 = (0, 0, 5) \times 10^{-10}\text{m}$ bzgl. kartesischer Koordinaten gegeben.



- Berechnen Sie das Spatprodukt $\langle \vec{a}_1 | \vec{a}_2 \times \vec{a}_3 \rangle$. Welche anschauliche Bedeutung hat das Spatprodukt?
- Für viele Anwendungen ist das sogenannte *reziproke Gitter* zweckmässig, welches (bis auf einen hier unwesentlichen Faktor 2π) gegeben ist durch:

$$\vec{b}_i = \frac{\vec{a}_j \times \vec{a}_k}{\langle \vec{a}_1 | \vec{a}_2 \times \vec{a}_3 \rangle}$$

(i, j, k = 1, 2, 3 und zyklisch vertauscht). Berechnen Sie für die oben angegebenen Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ die Vektoren $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$.

- Gegeben seien $\vec{u} = u_i \vec{a}_i = \vec{u}_j \vec{b}_j$ und $\vec{v} = v_i \vec{a}_i = \vec{v}_j \vec{b}_j$ (Summationskonvention). Gibt es einen Ausdruck für $\langle \vec{u} | \vec{v} \rangle$, der nur von den Komponenten $u_i, \vec{u}_j, v_i$ und $\vec{v}_j$ (aber nicht von den Basisvektoren $\vec{a}_i, \vec{b}_j$) abhängt?

3. **Levi-Civita & Kronecker** Mit Hilfe der in der Vorlesung bewiesenen Identität $\epsilon_{ijk}\epsilon_{klm} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}$ zeige man für vier Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ und $\vec{d}$ die folgenden Beziehungen:

(a) $\langle \vec{a} \times \vec{b} | \vec{c} \times \vec{d} \rangle = \langle \vec{b} | \vec{d} \rangle \langle \vec{a} | \vec{c} \rangle - \langle \vec{b} | \vec{c} \rangle \langle \vec{a} | \vec{d} \rangle$

(b) $\vec{a} \times (\vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a})) = \langle \vec{a} | \vec{b} \rangle \vec{a} \times \vec{c}$

Es gelte die Summationskonvention.

Bei Fragen zu den Aufgaben oder der Vorlesung bitte einfach mal im A313 vorbeikommen!