INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG

Prof. Dr. W. Brenig
Dipl.-Phys. S. Grossjohann

Rechenmethoden I — WiSe 2006/2007

5. Übungsblatt — Abgabe: **12.12.06 bis 11:25h, HA-Kiste bei A316**

1. **Lehrsätze aus der ebenen Geometrie (5 Punkte)**
   Beweisen Sie mit Hilfe der Vektorrechnung folgende Lehrsätze aus der ebenen Geometrie:

   (a) Die Seitenhalbierenden eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt.

   (b) Die Seitenhalbierenden schneiden sich im Verhältnis 2:1.

   (c) Die Seitenmittelpunkte eines (beliebigen) Vierecks bilden die Ecken eines Parallelogramms.

   Fertigen Sie zur Unterstützung der Beweisführung Skizzen an.

2. **Vektorraum aus Funktionen (4 Punkte)**
   Zeigen Sie, dass die Lösungen $\psi_i(x,t)$ der Wellengleichung

$$c^2 \frac{\partial^2 \psi_i(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \psi_i(x,t)}{\partial t^2}$$

   einen Vektorraum bilden.

3. **Basis und Basiswechsel (4 Punkte)**
   Gegeben seien 3 Einheitsvektoren $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \in \mathbb{R}^3$ sowie drei weitere Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \in \mathbb{R}^3$:

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

   (a) Zeigen Sie, dass die Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \in \mathbb{R}^3$ ebenfalls eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden.

   (b) Gegeben seien nun die zwei Vektoren $\vec{p} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}$ und $\vec{q} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$. Stellen Sie diese beiden Vektoren 1.) als Linearkobination der Vektoren der Standartbasis $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ und 2.) als Linearkobination der Basis $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ dar.

4. **Skalarprodukt der quadratintegrablen Funktionen (7 Punkte)**
   In der Quantenmechanik werden Ihnen des öfteren Funktionen über den Weg laufen, die die Eigenschaft der Quadratintegrabilitat besitzen, d.h. das Integral innerhalb eines Intervalls $[a, b]$ über ihr Betragsquadrat bleibt endlich und die Funktion damit normierbar, d.h.:

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx < \infty$$

   Der Raum der quadratintegrablen Funktionen wird häufig als $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ bezeichnet.

   (a) Zeigen Sie, dass für beliebige quadratintegrable, reellwertige Funktionen $g, f \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ ein Skalarprodukt in folgender Form definiert werden kann:

$$\langle f|g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

(b) Die folgenden Funktionen

$$\begin{aligned} f_0(x) &= 1 \\ f_n(x) &= \cos(nx), \quad n \geq 1 \\ g_n(x) &= \sin(nx), \quad n \geq 1 \end{aligned}$$

bilden ein vollständiges Ortho**gonal**system auf dem Intervall $I = [-\pi, \pi]$. Weisen Sie die Orthogonalität nach und finden Sie eine geeignete Normierung der Funktionen, um daraus ein Ortho**normal**system zu bilden!