INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG

Prof. Dr. W. Brenig
Dipl.-Phys. S. Grossjohann

Rechenmethoden I — WiSe 2006/2007

3. Übungsblatt — Abgabe: **28.11.06 bis 11:25h, HA-Kiste bei A316**

1. **Die Riemann-Summe (6+4 Punkte)**
   Betrachten Sie die Funktion
   $$f(x) = (x-2)^3 - x^2 + 10.$$
   (a) Zeichnen Sie die Funktion auf der positiven Halbachse.
   (b) Berechnen Sie:
   $$I = \int_0^4 f(x)dx.$$
   (c) Approximieren Sie das Integral aus b) mithilfe einer Riemann-Summe, indem Sie das Intervall $[0,4]$ in 4 gleich große Abschnitte zerlegen.
   (d) **Zusatzaufgabe (4 Punkte):** Schreiben Sie ein Programm mit einer Programmiersprache Ihrer Wahl (auch möglich: programmierbarer Taschenrechner), welches die Riemann-Summe berechnen kann mit einer frei wählbaren Anzahl von gleich großen Intervallen. Wie klein müssen die Intervalle gewählt werden, damit $|I - I_{Riemann}| < 10^{-2}$?

2. **Optimierung der Riemann-Summe: Trapez- & Simpson-Verfahren (14 Punkte)**
   Zwei genauere Methoden zur approximativen Bestimmung von Integralen sind die Trapez- und die Simpson-Regel. Beim Trapez-Verfahren verwendet man, für eine bessere Anpassung an die zu integrierende Funktion, die Steigung an den Zerlegungspunkten, d.h. man approximiert den Integranden als lineare Funktion. Entsprechend summiert man anstelle der Riemann-Rechtecke über Trapeze (siehe Abb. 1). Bei der Simpson-Regel geht man sogar noch einen Schritt weiter und entwickelt den Integranden bis zur zweiten Ordnung. Auf diesem Weg erhält man eine quadratische Näherung der Funktion in ihrem jeweiligen Teilintervall (siehe Abb. 2[1]).

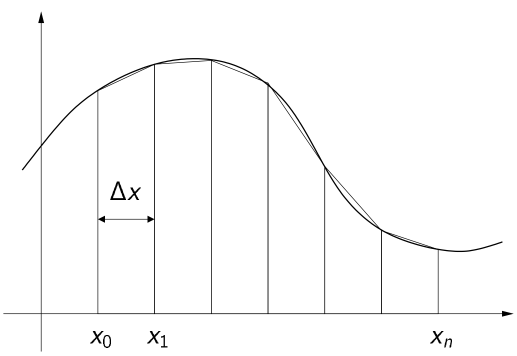

Abbildung 1: Trapez-Regel

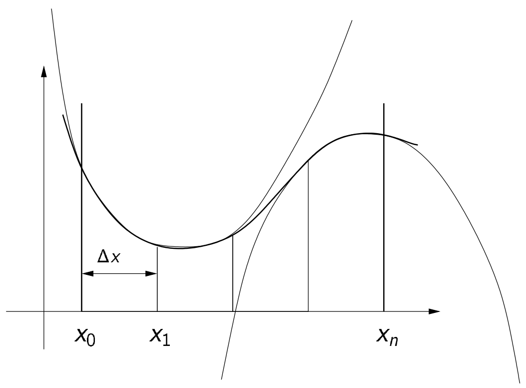

Abbildung 2: Simpson-Regel

[1] Die anschmiegenden Kurven in den Teilintervallen sollen Parabeln darstellen. Da dies Freihand-Zeichnungen sind möge man sich bitte nicht an der teilweise nur mäßigen Ausführung stören! :)

(a) Zeigen Sie mithilfe der Vorlesung, dass gilt:

$$\int_0^b f(x)dx \approx \sum_{n=0}^{N-1} \int_{n\Delta x}^{(n+1)\Delta x} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{d^k f}{dx^k} (x - n\Delta x)^k \right) dx$$

wobei $N\Delta x = b$ gilt.

(b) Zeigen Sie, dass aus 2a) die Riemann-Summe folgt, denn die Taylorentwicklung des Integranden bereits nach der **nullten** Näherung abgebrochen wird.

(c) Brechen Sie die Taylorentwicklung erst nach der **ersten** Ordung ab, so folgt daraus die Trapez-Regel:

$$I \approx \frac{\Delta x}{2} \left[f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \ldots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n) \right].$$

Zeigen Sie dies!

(d) Schließlich folgt die Simpson-Regel

$$I \approx \frac{\Delta x}{3} \left[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + \ldots + 4f(x_{n-1}) + f(x_n) \right]$$

direkt aus dem Abbruch der Reihe nach der **zweiten** Ordnung. Aus das ist zu zeigen. *Tip: Bei der Riemann-Summe brauchten Sie durch die nullte Näherung lediglich den Startpunkt x_i zur Berechnung eines Teilintegrals. Bei der Trapez-Regel wegen linearer Näherung ist der nächste Punkt (x_i & x_{i+1}) nötig, um die Teilfläche zu berechnen. Entsprechend benötigen Sie bei der Simpsons-Regel durch die quadratische Näherung, also durch die zweite Ableitung in der Taylorentwicklung, sogar den übernächsten Punkt! Das Integrationsintervall beträgt also bei der Simpsons-Regel $2\Delta x$!*

(e) Approximieren Sie das Integral aus Aufgabe 1 analog zu 1c) mit der Trapez- sowie der Simpson-Regel. Vergleichen Sie jeweils die Genauigkeit der drei Methoden.