



1. **Reihen (6 Punkte)**

Setzen Sie die nachfolgenden Zahlenfolgen sinnvoll (Bildungsgesetz?) in Form einer unendlichen Reihe fort. Überprüfen Sie diese anschliessend auf Konvergenz/Divergenz.

(a)

$$2 - 6 + 12 - 20 + 30 - \dots, \quad \text{Tip: } \sum a_n = \sum b_n c_n$$

(b)

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3^{3/2}} + \frac{1}{16} + \frac{1}{5^{5/2}} + \dots$$

(c)

$$1 - 2 + 2 - \frac{4}{3} + \frac{2}{3} - \frac{4}{15} + \dots$$

2. **Potenzreihen (6 Punkte)**

Bestimmen Sie den Konvergenzradius folgender Potenzreihen:

(a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!} x^n$$

(b)

$$\sum_{n=1}^{\infty} n! x^n$$

(c)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(2 - \frac{1}{n}\right)^n \left(\frac{x+1}{3}\right)^n$$

3. **Taylorreihen (8 Punkte)**

Entwickeln Sie die nachfolgenden Funktionen in eine Taylorreihe um x_0 . Geben Sie auch den Konvergenzradius an.

(a)

$$f(x) = x \sin(x), \quad x_0 = \pi/2$$

Zeigen Sie dazu durch **Induktion**, dass

$$\frac{d^n}{dx^n} (x \sin(x)) = x \frac{d^n}{dx^n} \sin(x) - n \frac{d^n}{dx^n} \cos(x)$$

gilt. Falls Ihnen die Beweismethode der Induktion noch unbekannt sein sollte, rechnen Sie die ersten 5 Ableitungen nach und überzeugen Sie sich von der Richtigkeit der angegebenen Formel.

(b)

$$f(x) = \frac{5 - 2x}{x^2 + x - 2}, \quad x_0 = 0$$

Verwenden Sie **Partialbruchzerlegung** and anschliessend die Ihnen bereits bekannte geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ für $|x| < 1$. Zur *Partialbruchzerlegung* siehe *Beispiel auf der Rückseite*. $\implies$

Beispiel zur Partialbruchzerlegung

Wir starten mit einem Ausdruck ähnlich zu Aufgabe 3b):

$$\frac{x}{x^2 + 5x + 6} = \frac{x}{(x+2)(x+3)}$$

Gesucht ist nun eine Zerlegung des Nenners (Partialbruchzerlegung), so dass

$$\frac{x}{(x+2)(x+3)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+3}$$

gilt. Es ist nun also A und B zu bestimmen!

$$\begin{aligned} \frac{x}{(x+2)(x+3)} &= \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+3} \\ \iff x &= A(x+3) + B(x+2) \end{aligned}$$

Es folgen zwei Gleichungen für die zwei Unbekannten A und B :

$$\begin{aligned} 0 &= 3A + 2B \\ \text{und } x &= Ax + Bx \end{aligned}$$

mit Lösung $A = -2$ und $B = 3$. Wir erhalten also als Ergebnis der Zerlegung:

$$\frac{x}{x^2 + 5x + 6} = \frac{-2}{x+2} + \frac{3}{x+3}.$$