



1. Stetigkeit (6 Punkte)

Überprüfen Sie folgende Funktionen auf Stetigkeit und verwenden Sie bei Bedarf die

Regel von l'Hospital: Sind f und g in einer Umgebung von x_0 differenzierbar und ist $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ von der Form $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$, dann ist $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ falls der letzte Grenzwert existiert.

(a) $f(x) = \sin(1/x)$

(b) $f(x) = \begin{cases} -x^3 + 10x^2, & x \leq 10 \\ c \ln(x-9), & c \in \mathbb{R} \quad x > 10 \end{cases}$

(c) $f(x) = \sin(x^2)/x$

2. Differentiation (6 Punkte)

(a) Berechnen Sie $\frac{d^2}{dy^2} \frac{\arcsin(xy^2)}{y}$.

(b) Zeigen Sie (mit der Regel zur Ableitung der Umkehrfunktion), dass $\frac{d}{dx} \sin(x) = \cos(x)$ gilt. Die Ableitung $\frac{d}{dx} \arcsin(x)$ ist Ihnen aus dem Vorkurs und der Präsenzübung bekannt.

(c) Für welches $a > 0$ wird der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow a} \frac{e^{-x} \ln(\frac{x}{a})}{\sin(\frac{x-a}{a^2})}$ maximal?

3. Newtonsches Näherungsverfahren (8 Punkte)

Das Newtonsche Näherungsverfahren ist ein numerisches Verfahren zur Lösung der Gleichung $f(x) = 0$. Dabei arbeitet man sich mit der Gleichung

$$\begin{aligned} (x_{n+1} - x_n) f'(x_n) &= -f(x_n) \\ \Leftrightarrow x_{n+1} &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \end{aligned}$$

iterativ zur Nullstelle vor.

(a) Bestimmen Sie zunächst die Nullstellen, Extrema und Wendepunkte der Funktion

$$f(x) = x(e^{x^2} - 4)$$

analytisch und fertigen Sie dazu eine Skizze der Funktion an.

(b) Versuchen Sie nun, eine der Nullstellen ($x \geq 0$) mithilfe des Newton-Verfahrens numerisch zu bestimmen (3-5 Iterationsschritte mit Taschenrechner/Computer/Bleistift). Wählen Sie als Startpunkte $x_0 = 0.6$, $x_0 = 0.65$ und $x_0 = 0.7$ und skizzieren Sie die Iterationsschritte für jeden der drei Startpunkte. Was ist also beim Newton-Verfahren in der Praxis zu beachten?