

# Versuch 22: Spektroskopische Bestimmung der Rydbergkonstanten

Aus der Balmerreihe des Wasserstoffatoms ist mit einem Spektroskop die Rydbergkonstante  $R_H$  für Wasserstoff zu bestimmen.

## Vorkenntnisse

Historische Atommodelle – Bohrsches Atommodell – Bohrsche Postulate – Drehbewegung – Materiewellen – Serienformel – Quantenzahlen und Atomaufbau – Orbitalmodell – Ionisierung und Anregung – Spektren technischer Lichtquellen – Thermischer Strahler - selektiver Strahler – Prismenspektrometer – Dispersion – Gitterspektrometer – Beugung und Interferenz

## Physikalische Grundlagen

Einatomige Gase emittieren und absorbieren nur Licht bestimmter Wellenlänge. Sie besitzen also linienhafte Emissions- und Absorptionsspektren. Für die Spektrallinien des atomaren Wasserstoffs, die im Spektrum gesetzmäßig aufeinander folgen, läßt sich eine experimentell gefundene *Serienformel* (Balmer, Rydberg) angeben:

$$h\nu = R_H \left( \frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad (1)$$

$R_H$  ist dabei die Rydbergkonstante und  $\nu$  die Frequenz des Lichtes. In dieser Schreibweise der Serienformel steht links die Lichtquantenenergie und  $R_H$  muß somit auch die Dimension einer Energie haben. Sie ist identisch mit der Ionisierungsenergie des Wasserstoffs.

Die Zahlen  $m$  und  $n$  sind die Hauptquantenzahlen. Die *Balmer-Serie*, die im sichtbaren Spektralbereich liegt, und die im Versuch ausgemessen werden soll, ergibt sich für  $m = 2$ . Die einzelnen Linien werden mit  $H_\alpha$  ( $n = 3$ ),  $H_\beta$  ( $n = 4$ ),  $H_\gamma$  ( $n = 5$ ) usw. bezeichnet. Die Begründung der Formel (1) wurde von Bohr durch sein Atommodell gegeben. Dieses Modell ist heute durch ein quantenmechanisches ersetzt (siehe Lehrbücher über Atomphysik). Zur Erklärung der Serienformel des Wasserstoffs ist es jedoch geeignet, so daß es für die weiteren Betrachtungen herangezogen wird.

Das Atom des Wasserstoffs besteht aus einem positiv geladenen Kern (Ladung  $+e$ ) und einem Elektron (Ladung  $-e$ ), das sich (in klassischer Betrachtungsweise) auf annähernd kreisförmigen Bahnen um den Kern bewegt. Für die Rechnung werden kreisförmige Bahnen angenommen, das Resultat gilt jedoch prinzipiell auch für Kepler-Ellipsen.

Die elektrostatische Anziehungskraft von Kern und Elektron (Coulomb-Kraft) wird durch die Zentrifugalkraft kompensiert. Mit dem Bahnradius  $r$ , der Elektronenmasse  $m_e$  und der Bahnge-

schwindigkeit  $v$  gilt also:

$$\frac{m_e v^2}{r} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (2)$$

Das *erste Bohrsche Postulat* verlangt, daß nur Bahnen stabil sind, auf denen der Drehimpuls ein ganzzahliges Vielfaches von  $\hbar = h/(2\pi)$  ist.

$$m_e v r = n \hbar \quad (3)$$

$n$  ist die Hauptquantenzahl, die neben anderen Quantenzahlen den Zustand des Atoms beschreibt. Aus den Gleichungen (2) und (3) folgt für den Bahnradius und die Bahngeschwindigkeit:

$$r = \frac{\epsilon_0 h^2 n^2}{\pi e^2 m_e} = a_0 n^2 \quad (4)$$

$$v = \frac{nh}{2\pi r m_e} = \frac{h}{2\pi m_e a_0 n} \quad (5)$$

Hier ist  $a_0$  der *1. Bohrsche Radius*, welcher den Radius der kernnächsten Bahn angibt. Die kinetische Energie der Elektronen ist:

$$E_{kin} = \frac{1}{2} m_e v^2 = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r} \quad (6)$$

Nimmt man den Nullpunkt der potentiellen Energie für ein unendlich weit entferntes Elektron (freies Elektron) an, dann erhält man für die potentielle Energie des Elektrons im Feld des Kerns:

$$E_{pot} = - \int_r^\infty \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r'^2} dr' = - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (7)$$

Für die Gesamtenergie  $E_n = E_{kin} + E_{pot}$  eines Elektrons auf der  $n$ -ten Bahn ergibt sich aus den Gleichungen (4), (6) und (7):

$$E_n = - \frac{e^4 m_e}{8 \epsilon_0^2 h^2 n^2} \quad (8)$$

Die Gleichung (8) kann in einem Energieniveauschema dargestellt werden. Die Energie steigt mit wachsender Hauptquantenzahl. Beim Übergang eines Elektrons von der  $n$ -ten auf die  $m$ -te Bahn ( $n > m$ ) wird Energie frei, die in Form von elektromagnetischer Strahlung abgegeben wird. Die Frequenz der Strahlung (Licht) ist gegeben durch:

$$h\nu = \Delta E = E_n - E_m \quad (9)$$

Da der Brechungsindex von Luft nicht wesentlich von dem des Vakuums abweicht, können Frequenz und Wellenlänge folgendermaßen über die Vakuumlichtgeschwindigkeit  $c$  in Beziehung gesetzt werden:

$$c = \lambda \nu \quad (10)$$

Aus Gleichung (1) und Gleichung (9) erhält man für die Frequenz des emittierten Lichtes:

$$\nu = \frac{e^4 m_e}{8 \epsilon_0^2 h^3} \left( \frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right) = R_\infty \left( \frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad (11)$$

$R_\infty$  ist die Rydbergkonstante für einen unbewegten (unendlich schweren) Kern. Unter Berücksichtigung der Mitbewegung des Wasserstoffkernes (Proton) ergibt sich:

$$R = R_\infty \frac{m_p}{m_p + m_e} \quad (12)$$

Die Zahlenwerte für die verwendeten Naturkonstanten sind der Literatur zu entnehmen.

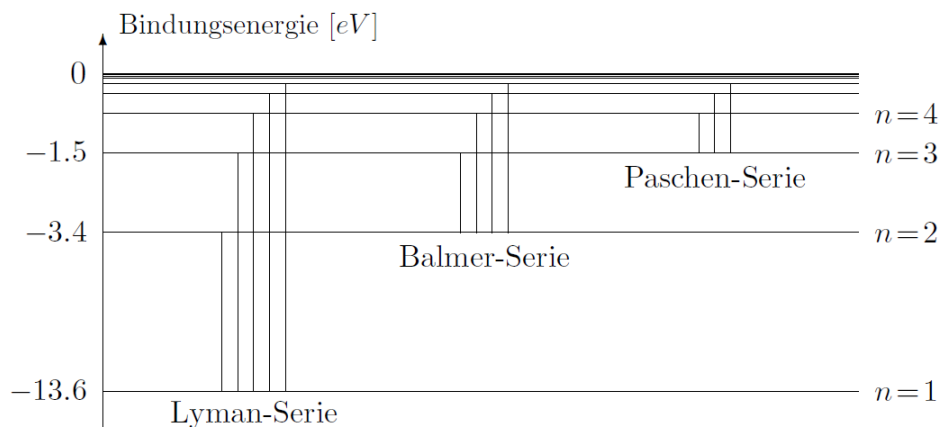


Abb. 1: Termschema des Wasserstoff

## Experiment

Die im sichtbaren Spektralbereich liegenden Balmer-Linien werden mit einem Spektroskop beobachtet. Dabei wird zunächst ein Prisma zur spektralen Zerlegung des Lichtes benutzt. Das Spektroskop ist im Prinzip wie in Abbildung 1 gezeigt aufgebaut. Der Spalt soll von der Lichtquelle gut ausgeleuchtet sein, was im allgemeinen nur erreicht wird, indem die Lichtquelle mittels einer Linse (Kondensorlinse) auf den Spalt abgebildet wird. Der Spalt wirkt dann als sekundäre Lichtquelle. Der Abstand des Spaltes zur Kollimatorlinse ist gleich deren Brennweite, so daß das Prisma von parallelem Licht durchsetzt wird. Der Ablenkwinkel nach Durchlaufen des Prismas ist von der Wellenlänge des Lichtes abhängig (Brechungsgesetz mit wellenlängenabhängigem Brechungsindex). So entsteht für jede Wellenlänge ein eigenes Bild des Spaltes in der Brennebene der Fernrohrlinse. Diese Spaltbilder werden durch das Okular des Fernrohres beobachtet, das zu diesem Zweck auf unendlich eingestellt werden muß. Für eine quantitative Messung wird gleichzeitig eine lineare Skala mit Hilfe des sogenannten Skalenrohres in die Brennebene der Fernrohrlinse abgebildet. Die Beleuchtung des Skalenrohres erfolgt mit einer separaten Lichtquelle. Das Fernrohr ist schwenkbar, damit nacheinander das ganze Spektrum beobachtet werden kann. Das zur Kalibrierung verwendete Helium- und das Wasserstoffspektralrohr werden mit einem Hochspannungsnetzgerät betrieben. Die Hochspannung wird durch eine Zündspule erzeugt. Eine Berührung der hochspannungsführenden Teile der Apparatur ist ungefährlich, aber schmerzhaft. Daher Vorsicht beim Wechseln der Spektralröhren. Die Hochspannungsquelle ist dabei **unbedingt** auszuschalten.

## Übungsaufgabe

Der Unterschied der Formeln (8.11) und (8.12) besteht in der Verwendung der reduzierten Masse des Elektrons im Elektron-Proton-System an Stelle der Elektronen-Ruhemasse. Leiten Sie den Ausdruck

$$M_{red} = \frac{m_p m_e}{m_p + m_e}$$

für die reduzierte Masse her.

Beachten Sie dabei, daß die Masse nur eine Rolle für die kinetische Energie spielt. Berechnen Sie zunächst die Gesamtenergie für zwei unabhängige Teilchen und führen dann einen Abstandsvektor zwischen diesen ein. Die reduzierte Masse folgt dann aus der Forderung, daß die Energie in dem Koordinatensystem mit dem Schwerpunkt der beiden Teilchen als Ursprung die gleiche sei. Das Ergebnis hat formal die Form der kinetischen Energie eines einzelnen Teilchens.

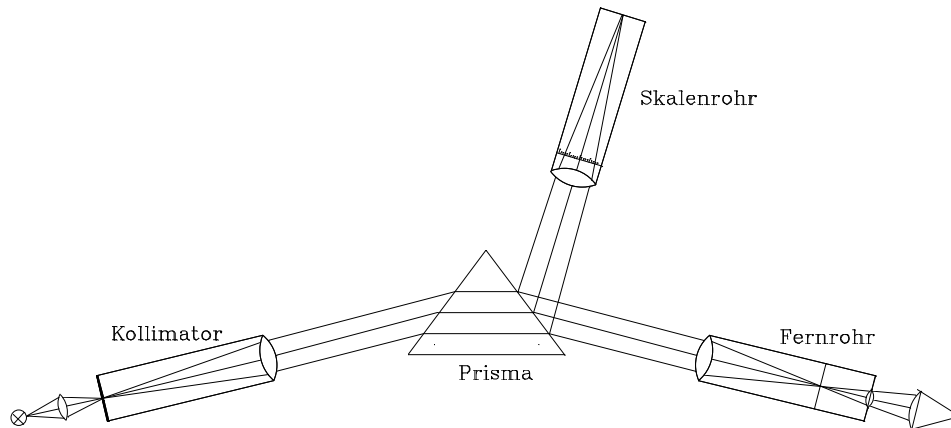


Abb. 2: Aufbau des Spektroskopes

## Versuchsaufgaben

1. Zunächst soll das Spektroskop justiert werden. Dazu gehe man folgendermaßen vor:

- Man löse die Schrauben **S1** und **S2** am Spektroskop ein wenig und bringe Schraube **S3** in die Mittelstellung.
- Das Fernrohr muß auf unendlich eingestellt werden, da es die parallel vom Prisma kommenden Strahlen scharf abbilden soll.
- Mit dem justierten Fernrohr wird ohne Prismenstück der Kollimatorschlitz betrachtet und das Fernrohr so lange verschoben, bis der Schlitz in der Mitte des Fadekreuzes scharf durch das Fernrohr abgebildet wird. Das Fernrohr wird mit der Schraube **S1** fixiert.
- Einstellung des Teilkreises mittels Bewegung des Skalenrohres bis zum Anschlag auf ca.  $307,3^\circ$  und Feststellen des Teilkreises mit der Schraube **S2**.
- Lösen der Schraube **S1**, Drehen des Fernrohres auf  $357^\circ$  und Feststellen der Schraube **S1**.
- Einsetzen des Prismenstückes mit der brechenden Kante des Prismas auf  $220^\circ$ . Aufsetzen des Schutzes und Festschrauben des Prismenstückes mit den Rändelschrauben. Bei richtiger Justierung sind dann die Spektren und die eingespiegelte Skala scharf im Gesichtsfeld des Fernrohres. Mit Schraube **S3** kann das Fernrohr um kleine Winkel um diese Nullstellung herum geschwenkt werden. Man beachte, daß nach der Justierung die Schlitzbreite hinreichend verkleinert werden muß, damit man scharfe Spektrallinien erhält.

2. Man kalibriert das Spektroskop mit Hilfe der bekannten He-Linien. Man erhält eine Zuordnung der Skalenteile zu den Lichtwellenlängen. Man stelle diese graphisch als Kalibrierkurve dar. Sie soll so angelegt werden, daß eine geringfügige Extrapolation möglich ist.

He-Linien für die Kalibrierung		
Wellenlänge in nm	Farbe	Intensität
706.5	rot	schwach
667.8	rot	stark
587.5	gelb	stark
504.7	grün	schwach
501.6	grün	stark
492.2	blaugrün	mittel
471.3	blau	mittel
447.1	violett	stark
438.8	violett	schwach

3. Aus dem Wasserstoffspektrum ermittelt man die Lage der  $H_\alpha$ ,  $H_\beta$ ,  $H_\gamma$ -Linien. Aus den abgelesenen Skalenwerten wird über die Kalibrierkurve die zugehörige Wellenlänge bestimmt. Mit den Gleichungen (9),(10) errechnet man die dazugehörige Energie des Überganges und daraus die Rydbergkonstante.
4. Man bestimme die Wellenlängen der Balmer-Serie auch mit Hilfe eines Gitters anstelle des Prismas und berechne wieder die Werte für  $R_H$ . Der Aufbau des Spektroskops bleibt unverändert, jedoch wird zur Zerlegung des Lichtes ein Gitter verwendet. Die eingespiegelte Skala wird durch eine Winkelskala ersetzt. Eine Kalibrierung ist deshalb nicht erforderlich. Die Messung geschieht folgendermaßen:
  - Man ersetze das Prisma mit Prismentisch durch das Gitter. Das Fernrohr erhält einen Blendschutz.
  - Man löst Schraube S2 und dreht den Teilkreis, bis das Licht vom Kollimator das Gitter senkrecht durchsetzt. Schraube S2 wird dann wieder angezogen.
  - Nach Lösen von Schraube S1 wird das Fernrohr so geschwenkt, daß die nullte Ordnung im Fernrohr sichtbar wird. Schraube S1 wird dann festgezogen.
  - Durch Drehen an Schraube S3 wird die zu vermessende Spektrallinie mit dem Fadenkreuz zu Deckung gebracht. Das Fadenkreuz kann mit einer kleinen Lampe beleuchtet werden, ihre Helligkeit soll der der Spektrallinien angepaßt werden. Es werden die Winkel  $\beta$  und  $\beta'$  der Beugungsordnungen rechts und links von der nullten Ordnung bestimmt. Bei der  $H_\gamma$ -Linie kann nur die erste Ordnung, bei den anderen sollen auch höhere Ordnungen ausgemessen werden. Reicht dazu der mit Schraube S3 einstellbare Winkelbereich nicht aus, so wird nach dem Lösen von Schraube S1 das Fernrohr zunächst grob auf die gewünschte Linie eingestellt, und dann mit Schraube S3 die Feineinstellung vorgenommen.
  - Mit der Gitterkonstanten des verwendeten Gitters ( $b = 10\mu\text{m}$ ) werden die Wellenlängen über die Beugungsbedingungen berechnet:

$$n\lambda = b \sin \alpha \quad ; \quad \alpha = \frac{\beta - \beta'}{2} \quad (13)$$

5. Man berechne aus den experimentellen Daten und den entsprechenden Hauptquantenzahlen  $m$  und  $n$  die Rydbergkonstante  $R_H$  und stelle einen Vergleich mit dem theoretisch zu erwartenden Wert an. Geben Sie  $R_H$  in eV an. Dieser Energiewert ist gleich der Ionisierungsenergie des Wasserstoffatoms.