

Adiabatenkoeffizient

Ziel des Versuches

Der Adiabatenkoeffizient κ von Gasen wird über zwei verschiedene makroskopische Messverfahren bestimmt: nach dem Verfahren von Clement-Desormes sowie mithilfe von Staubfiguren im Kundtschen Rohr. Durch die Bestimmung von κ kann auf die molekulare Struktur des untersuchten Gases geschlossen werden.

Vorkenntnisse

Thermodynamische Begriffe: Temperatur – innere Energie – Wärmemenge – Wärmekapazität – Zusammenhang von C_p/C_V mit dem Aufbau der Gasmoleküle – ideales Gas – reales Gas – kritischer Punkt – isotherme, isobare, isochore und adiabatische Zustandsänderungen – $p - V$ - und $p - T$ -Diagramme für ideale und reale Gase – thermodynamische Kreisprozesse (z.B. Carnot-Prozess) – Gesetze von Avogadro, Boyle-Mariotte, Gay-Lussac, Poisson, Dalton – Hauptsätze der Thermodynamik

Begriff der Schwingung und der Welle: Schwingungsgleichung und eindimensionale Wellengleichung – Amplitude – Schwingungsdauer – Frequenz – Phase - Ausbreitungsgeschwindigkeit – Phasen- und Gruppengeschwindigkeit – Wellenlänge – stehende Wellen – transversale und longitudinale Wellen – Schall und dessen Ausbreitung in festen Stoffen und in Gasen

Messmethoden: Messung der Wellenlänge, Frequenz, Ausbreitungsgeschwindigkeit; insbesondere mit dem Kundtschen Rohr – Grund- und Oberschwingungen

Physikalische Grundlagen

Thermodynamische Zustandsgrößen

Unter einem thermodynamischen Zustand wird immer ein *Gleichgewichtszustand* verstanden, d.h. ein Zustand, den das betrachtete System unter den ihm aufgezwungenen Bedingungen nach unendlich langer Zeit einnimmt. Der Zustand wird durch Angabe von Zustandsgrößen charakterisiert. Die Zustandsgrößen müssen dabei die Bedingung erfüllen, dass ihr Zahlenwert unabhängig vom Weg ist, auf dem das thermodynamische System den Zustand erreicht hat. Zu solchen Zustandsgrößen gehören z.B. die Temperatur, der Druck, das Volumen, die innere Energie und die Entropie. Keine Zustandsgröße im eigentlichen Sinne ist z.B. die Wärmemenge. *Warum nicht? Verdeutlichen Sie sich dies anhand eines Kreisprozesses!*

Zustandsgrößen, die mit der Größe des thermodynamischen Systems skalieren, bezeichnet man als extensive Größen. Intensive Größen sind dementsprechend unabhängig von der Systemgröße. Ein System kann aus mehreren Phasen, d.h. verschiedenen, jeweils physikalisch einheitlichen

Teilen bestehen (z.B. Eis, Wasser und Wasserdampf). Ebenso kann ein System aus einer Anzahl frei veränderlicher chemischer Verbindungen bestehen, kurz aus Stoffen. Ein System wird als homogen bezeichnet, wenn es an allen Orten die gleichen Eigenschaften besitzt. Heterogene Systeme bestehen aus homogenen Teilsystemen, die durch Grenzflächen voneinander getrennt sind.

Ein Zustand ist bestimmt durch die Angabe der Masse und die Zusammensetzung der einzelnen Phasen sowie die Angabe ihrer jeweiligen Temperaturen T , der Drücke p und der Volumina V , d.h. durch Angabe der thermodynamischen Zustandsgrößen.

Zustandsgleichungen thermodynamischer Systeme

Der funktionale Zusammenhang zwischen den Zustandsgrößen eines Systems im thermodynamischen Gleichgewicht ist durch die Zustandsgleichungen gegeben. Besonders einfache Verhältnisse liegen bei homogenen Einstoff- und Einphasensystemen vor. Als Beispiele sind hier die thermischen Zustandsgleichungen des idealen und realen Gases angeführt.

Ideales Gas

Das ideale Gas ist charakterisiert durch das Grenzverhalten eines unendlich verdünnten Gases aus nicht-wechselwirkenden Teilchen, die kein Eigenvolumen haben. Die Zustandsgleichung des idealen Gases lautet

$$p \cdot V = n \cdot R \cdot T = \frac{m}{M} \cdot R \cdot T \quad , \quad p \cdot V_m = R \cdot T \quad (1)$$

mit

- n : Anzahl der Mole des Gases, aus dem das System besteht
- R : allg. Gaskonstante, $R = 8,314 \text{ J}/(\text{mol K}) = 1,986 \text{ cal}/(\text{mol K})$
- m : Masse des Gases, M : molare Masse
- V_m : molares Volumen ($V_m = V/n$).

Reales Gas

Die Zustandsgleichung eines realen Gases muss die Wechselwirkungen zwischen den Molekülen des Gases und deren Eigenvolumen berücksichtigen. Die endlichen Volumina der Moleküle und die attraktiven Kräfte, die zwischen ihnen wirken, werden durch folgende Korrekturen des Drucks und des Volumens in der thermischen Zustandsgleichung des idealen Gases berücksichtigt:

$$\left(p + \frac{a}{V_m^2} \right) \cdot (V_m - b) = R \cdot T \quad (\text{van der Waalssche Zustandsgleichung}), \quad (2)$$

wobei b das Eigenvolumen der Moleküle und a/V_m^2 die Druckverringerung durch die gegenseitigen anziehenden Kräfte der Moleküle berücksichtigt. *Welche Folgen hat diese Zustandsgleichung für das $p - T$ - und $p - V$ -Diagramm?*

Innere Energie und Wärmekapazitäten

Wird mit $\delta A = -p \cdot dV$ eine am System geleistete Arbeit und mit δQ eine dem System zugeführte Wärmemenge bezeichnet, so ist

$$dU = \delta Q + \delta A = \delta Q - p \cdot dV \quad (1. \text{ Hauptsatz}) \quad (3)$$

der Zuwachs der inneren Energie des Systems. *Warum werden hier verschiedene Symbole für die Differentiale benutzt?* Die innere Energie ist eine Zustandsgröße oder Zustandsfunktion. Unter innerer Energie kann man sich die kinetische, potentielle, chemische und elektrische Energie der Moleküle vorstellen. Da die Moleküle eines idealen Gases keine Wechselwirkung miteinander haben, hängt die innere Energie U für diesen Fall nur von der Temperatur ab: $U = U(T)$.

Die spezifische Wärmekapazität c und die molare Wärmekapazität C sind durch

$$\delta Q = m \cdot c \cdot dT = n \cdot C \cdot dT \quad . \quad (4)$$

definiert. Sie geben also den Zusammenhang zwischen der dem Körper zugeführten Wärmemenge δQ und der entsprechenden Temperaturerhöhung dT an und sind im Allgemeinen temperaturabhängig. Wegen

$$\delta Q = dU + p \cdot dV \quad (5)$$

sind die Wärmekapazitäten somit davon abhängig, ob die Erwärmung bei konstantem Druck oder bei konstantem Volumen erfolgt. C_V ist die molare Wärmekapazität bei konstantem Volumen ($\delta Q = dU$), C_p ist diejenige bei konstantem Druck ($\delta Q = dU + p \cdot dV$)

$$C_p = \left. \frac{1}{n} \frac{\delta Q}{\delta T} \right|_{p=\text{const.}} \quad , \quad (6)$$

$$C_V = \left. \frac{1}{n} \frac{\delta Q}{\delta T} \right|_{V=\text{const.}} = \left. \frac{1}{n} \frac{\partial U}{\partial T} \right|_{V=\text{const.}} \quad . \quad (7)$$

Für das ideale Gas, bei dem $U = U(T)$ ist, unterscheiden sich C_V und C_p also um die Arbeit $p \cdot dV$, die das Gas bei konstantem Druck durch seine Ausdehnung leistet. C_p ist für das ideale Gas größer als C_V und es gilt die Beziehung $C_p - C_V = R$, wobei R die allgemeine Gaskonstante aus der Zustandsgleichung (s.o.) ist.

Zustandsänderungen

Als Zustandsänderung bezeichnet man den Übergang von einem thermodynamischen Zustand in einen anderen. Ist der Anfangszustand ein Gleichgewichtszustand, so kann eine Zustandsänderung nur durch Änderung der äußeren Bedingungen, denen das System unterworfen ist (z.B. Änderung des Drucks), hervorgerufen werden. Die Beschreibung des hieraus resultierenden Endzustandes im Rahmen der Thermodynamik setzt voraus, dass es sich bei diesem Endzustand wieder um einen Gleichgewichtszustand handelt.

Isotherme Zustandsänderung ($dU = 0$ bei idealem Gas)

Durchläuft ein System eine Reihe von Zuständen bei gleicher Temperatur, spricht man von isothermen Zustandsänderungen. Für das ideale Gas folgt für eine isotherme Zustandsänderung aus der thermischen Zustandsgleichung, dass $p \cdot V = \text{const.}$ und aus dem 1. Hauptsatz, dass $\delta Q = p \cdot dV$ ist ($dU = 0 = \delta Q + \delta A$). Im Experiment erreicht man eine isotherme Zustandsänderung durch Ankopplung des Systems an ein Wärmereservoir mit praktisch unendlicher Wärmekapazität (z. B. Umgebung mit Zimmertemperatur) und eine ausreichend langsame Versuchsdurchführung, die einen Temperatureausgleich zwischen System und Umgebung garantiert.

Adiabatische Zustandsänderung ($\delta Q = 0$)

Eine Zustandsänderung, bei der kein Wärmeaustausch des betrachteten Systems mit der Umgebung stattfindet, nennt man adiabatisch (d. h. $\delta Q = 0$). Mit dem 1. Hauptsatz folgt: Die Änderung der inneren Energie ist gleich der von außen geleisteten Arbeit ($\delta Q = 0 = dU + p \cdot dV$). Damit tritt im Allgemeinen eine Temperaturänderung ein. Für das ideale Gas mit dem Adiabatenkoeffizienten $\kappa = C_p/C_V$ gilt die Gleichung

$$p \cdot V^\kappa = \text{const.} \quad (\text{Adiabatengleichung}). \quad (8)$$

Im Experiment erreicht man eine adiabatische Zustandsänderung durch eine so rasche Versuchsdurchführung, dass ein Wärmeaustausch zwischen dem System und der Umgebung quasi ausgeschlossen ist. Voraussetzung für eine adiabatische Zustandsänderung ist also, dass sich das thermodynamische Gleichgewicht des Systems viel schneller einstellt als der Temperatureausgleich mit der Umgebung erfolgt.

Thermodynamische Kreisprozesse

Ein Kreisprozess wird durch eine geschlossene Kurve in einem Zustandsdiagramm beschrieben. Die Funktion von Wärmekraftmaschinen kann man in einem Kreisprozess darstellen, am bekanntesten ist der Carnot-Prozess, der aus zwei Isothermen und zwei Adiabaten besteht. „Reale“ Motoren werden durch andere „Zustandskurven“ beschrieben. Der Wirkungsgrad ist immer kleiner oder höchstens gleich dem der Carnot-Maschine. In Abbildung 1 ist der ideale Stirling-Prozess dargestellt.

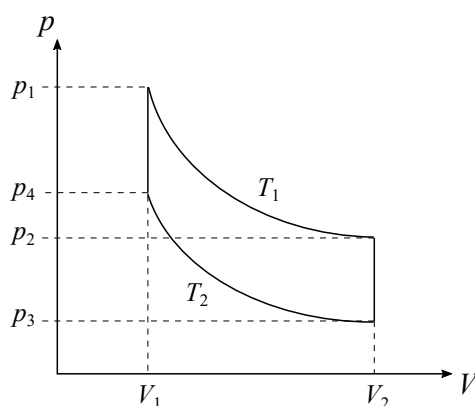


Abb. 1: $p - V$ -Diagramm des Stirling-Prozesses

Analog zum Carnot-Prozess besteht der Stirling-Prozess aus zwei Isothermen, anstatt der Adiabaten stehen hier jedoch Isochoren. Man berechnet die Arbeit, die in einem Umlauf geleistet wird, indem man das Integral

$$\oint p dV = \int_{V_1}^{V_2} p(T_1) dV + \int_{V_2}^{V_1} p(T_2) dV \quad (9)$$

löst. Man kann berechnen, dass der (theoretische) Wirkungsgrad des Stirling-Motors gleich dem des Carnot-Motors ist, nämlich

$$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1} \quad (10)$$

Der Gleichverteilungssatz der Energie

Die kinetische Gastheorie geht von der Hypothese aus, dass die bei konstantem Volumen aufgenommene Wärmemenge zur Erhöhung der kinetischen Energie der Moleküle des Systems verwendet wird. In Übereinstimmung mit der Erfahrung liefert die Theorie neben der thermischen Zustandsgleichung auch die molaren Wärmekapazitäten C_p und C_V . Die Ableitung der Zustandsgleichung für ein ideales (eiatomiges) Gas ergibt für die kinetische Energie

$$\frac{m_0 \cdot \overline{v^2}}{2} = \frac{3}{2} kT \quad . \quad (11)$$

Hier ist k die Boltzmannkonstante, $\overline{v^2}$ der Mittelwert der Geschwindigkeitsquadrate und m_0 die Molekülmasse. Wegen der Gleichwertigkeit aller Geschwindigkeitsrichtungen x, y, z gilt im statistischen Mittel

$$\overline{v_x^2} = \overline{v_y^2} = \overline{v_z^2} = \frac{1}{3} \overline{v^2} \quad . \quad (12)$$

Diese Aussage führt zum Gleichverteilungssatz der Energie. Er lautet: Im statistischen Mittel entfällt auf jeden Freiheitsgrad eines Moleküls derselbe Energiebetrag von $\frac{1}{2} kT$. Die Energie pro Mol und Freiheitsgrad ist also $N_A \cdot kT/2 = RT/2$ (N_A ist die Avogadro-Konstante: $N_A = 6,022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$).

Für die molaren Wärmekapazitäten mit $V = \text{const.}$ bzw. $p = \text{const.}$ gilt

$$C_V = \left. \frac{\partial U}{\partial T} \right|_{V=\text{const.}} = \frac{f}{2} \cdot R \quad , \quad C_p - C_V = R \quad , \quad \kappa = \frac{C_p}{C_V} = \frac{f+2}{f} \quad , \quad (13)$$

wobei f die Zahl der Freiheitsgrade des Moleküls kennzeichnet. Der Gleichverteilungssatz macht eine Aussage über das statistische Verhalten von Vielteilchensystemen (Systemen, die aus vielen gleichen Teilchen bestehen). Er ist ein Satz der klassischen Statistik und hat auch, wie die Erfahrung zeigt, für mehratomige Moleküle Gültigkeit. Seine Gültigkeit wird bei tiefen Temperaturen jedoch durch Quanteneffekte eingeschränkt, weil bei tiefen Temperaturen nicht jeder Freiheitsgrad zur Energieaufnahme beiträgt. Beispielsweise sind bei hinreichend tiefen Temperaturen die Schwingungen zweiatomiger Moleküle nicht angeregt.

Beispiele

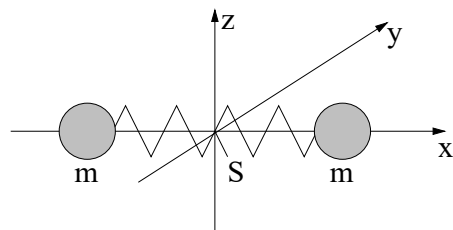
1. Eiatomiges Gas

Energie: $E = E_{\text{Trans.}} = (1/2 m_0) \cdot (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)$ (p_x : x -Komponente des Impulses)

Zahl der Freiheitsgrade: $f = f_{\text{Trans.}} = 3 \Rightarrow \kappa = 5/3 = 1,6$

2. Gas aus zweiatomigen Molekülen

Für ein zweiatomiges Molekül wird das Hantelmodell angenommen. Die beiden Atome werden durch Punkte, die Bindungskräfte durch eine Feder dargestellt. Die Energie der allgemeinsten Bewegung eines solchen Hantelmodell-Teilchens E besteht aus drei Anteilen



$$E = E_{\text{Trans.}} + E_{\text{Rot.}} + E_{\text{Schwing.}} \quad . \quad (14)$$

Die einzelnen Anteile berechnen sich wie folgt:

(a) Translationsenergie

$$E_{\text{Trans.}} = \frac{1}{2M} \cdot (p_{sx}^2 + p_{sy}^2 + p_{sz}^2) \Rightarrow f_{\text{trans}} = 3 \quad (15)$$

(M : Molekülmasse, p_{sx} : x -Komponente des Impulses des Schwerpunktes)

(b) Rotationsenergie

$$E_{\text{Rot.}} = \frac{1}{2\Theta_y} \cdot L_y^2 + \frac{1}{2\Theta_z} \cdot L_z^2 \Rightarrow f_{\text{Rot.}} = 2 \quad (16)$$

(Θ_y : Trägheitsmoment um die y -Achse, L_y : y -Komponente des Drehimpulses)

Das Trägheitsmoment des Hantelmodells für die Rotation um die x -Achse ist gering. Quantenmechanische Berechnungen zeigen, dass dieser Freiheitsgrad nicht angeregt wird. Deshalb enthält die Rotationsenergie eines zweiatomigen Moleküls keinen Anteil, der einer Drehung um die Verbindungslinie der Atome entspricht.

(c) Schwingungsenergie

$$E_{\text{Schwing.}} = D \cdot X^2 + p^2/m_0 \Rightarrow f_{\text{Schwing.}} = 2 \quad (17)$$

(D : Federkonstante, X : Auslenkung eines Atoms aus der Ruhelage)

In dem hier verwendeten Modell erhält man für ein zweiatomiges Molekül sieben Freiheitsgrade. Die Freiheitsgrade eines Systems treten jedoch nur dann in Erscheinung, wenn eine hinreichende Energie (was einer hohen Temperatur entspricht) zur Verfügung steht, um sie anzuregen. Freiheitsgrade, die nicht angeregt sind, können außer Acht gelassen werden. Bei Zimmertemperatur sind Molekülschwingungen im Allgemeinen noch nicht angeregt. (Im Hantelmodell wird die Feder durch eine starre Achse ersetzt). Damit gilt für zweiatomige Moleküle: $f = 5$.

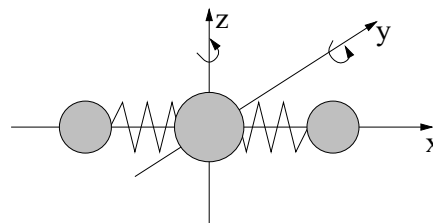
3. Gas aus dreiatomigen Molekülen

Bei dreiatomigen Molekülen muss man nach der Anordnung der Atome zwei Typen unterscheiden:

(a) Lineare dreiatomige Moleküle

Hier hat man, wie beim zweiatomigen Molekül, zwei Rotationsachsen. Es sind jedoch zwei Schwingungsarten mit je zwei Freiheitsgraden möglich. Für die Anzahl der Freiheitsgrade ergibt sich somit:

$$\begin{aligned} f_{\text{Trans.}} &= 3 \\ f_{\text{Rot.}} &= 2 \\ f_{\text{Schwing.}} &= 2 \cdot 2 = 4 \quad . \end{aligned}$$



Lineare dreiatomige Moleküle besitzen daher neun Freiheitsgrade.

(b) Nicht-lineare dreiatomige Moleküle

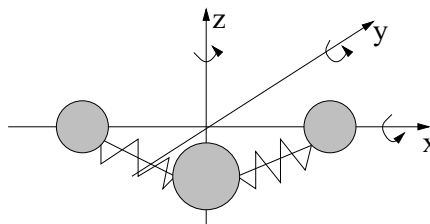
Beim nicht-linearen dreiatomigen Molekül ist die Rotation um alle drei Raumrichtungen möglich. Für $E_{\text{Rot.}}$ gilt daher

$$E_{\text{Rot.}} = \frac{1}{2\Theta_x} \cdot L_x^2 + \frac{1}{2\Theta_y} \cdot L_y^2 + \frac{1}{2\Theta_z} \cdot L_z^2 \quad . \quad (18)$$

Da beim nicht-linearen Molekül drei Schwingungsarten möglich sind, ergibt sich für die Zahl der Freiheitsgrade

$$f_{\text{Trans.}} = 3, \quad f_{\text{Rot.}} = 3, \quad f_{\text{Schwing.}} = 6 \quad . \quad (19)$$

Die Bestimmung von κ liefert Aufschluss über den molekularen Aufbau bzw. über die Zahl der Freiheitsgrade, auf die sich laut Gleichverteilungssatz die innere Energie eines Systems verteilt.

**Bestimmung von C_p/C_V nach Clement-Desormes**

Für adiabatische Zustandsänderungen eines idealen Gases gilt $p \cdot V^\kappa = \text{const.}$ Durch Differentiation erhält man

$$dp_{\text{ad.}} = -\kappa \cdot \frac{p}{V} \Big|_A \cdot dV_{\text{ad.}} \quad \text{mit} \quad dp_{\text{ad.}} = dp_{\text{adiabatisch}} \quad . \quad (20)$$

In Worten lautet die Aussage dieser Gleichung: Wenn man von einem durch p , V und T gegebenen thermodynamischen Gleichgewichtszustand eines idealen Gases (hier durch den Buchstaben A gekennzeichnet) ausgehend eine adiabatische Volumenänderung $dV_{\text{ad.}}$ erzeugt, hat dies die nach obiger Formel gegebene adiabatische Druckänderung $dp_{\text{ad.}}$ zur Folge.

Für isotherme Zustandsänderungen eines idealen Gases gilt $p \cdot V = \text{const.}$ Differentiation nach V ergibt

$$dp_T = -\frac{p}{V} \Big|_A \cdot dV_T \quad , \quad dV_T \text{ bedeutet } dV \text{ bei festem } T \quad . \quad (21)$$

Wenn man bei einem idealen Gas von einem Gleichgewichtszustand A ausgehend ein und dieselbe Volumenänderung dV einmal adiabatisch $dV = dV_{\text{ad.}}$ und einmal isotherm $dV = dV_T$ durchführt, so lässt sich κ aus den Messwerten bestimmen: $\kappa = dp_{\text{ad.}}/dp_T$. Mit Hilfe des unten beschriebenen Experimentes wird κ durch den Differenzenquotienten $\Delta p_{\text{ad.}}/\Delta p_T$ (anstelle des Differentialquotienten $dp_{\text{ad.}}/dp_T$) bestimmt.

Die Wellengleichung

Wird in einem deformierbaren Medium an einer bestimmten Stelle eine (elastische) Deformation (Erregung) hervorgerufen, so bleibt dieser Störungszustand nicht auf das Erregungszentrum beschränkt, sondern pflanzt sich im Medium fort. Den sich zeitlich und räumlich verändernden Zustand nennt man (*Schall-*)*Welle*. Die mathematische Formulierung der Wellenausbreitung im Medium ist Gegenstand der Wellenlehre. Eine zentrale Bedeutung hat die (eindimensionale) Wellengleichung, die in vielen Fällen die Ausbreitung von (*Schall-*)Wellen korrekt beschreibt

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad . \quad (22)$$

Dabei ist u die Verschiebung der an der Wellenausbreitung beteiligten Teilchen aus ihrer Ruhelage, t die Zeit, x die Ortskoordinate und c zunächst eine Konstante, die physikalisch als Phasengeschwindigkeit im homogenen Medium aufgefasst werden kann (s. u.). Diese Wellengleichung wird allgemein durch den Ansatz

$$u(x, t) = f\left(\frac{c \cdot t \pm x}{x_0}\right) \quad (23)$$

gelöst, wobei f eine beliebige, zweimal nach x und t differenzierbare Funktion ist (x_0 im Nenner hat die Dimension einer Länge, damit das Argument von f dimensionslos bleibt, wie es bei einer Funktion, deren Veränderliche aus physikalischen Größen bestehen, immer sein muss). Besonders häufig auftretende Spezialfälle sind die ebene, harmonische Welle und die Kugelwelle.

Die ebene, harmonische Welle

$$u = u_0 \cdot \sin(\omega t \pm kx) \quad (24)$$

mit der Ausbreitungsrichtung in positiver x -Richtung ($-$) bzw. negativer x -Richtung ($+$). Aus der Periodizitätsforderung in Raum und Zeit folgt

$$\omega \cdot T = 2\pi \quad \text{und} \quad k \cdot \lambda = 2\pi \quad (25)$$

mit

λ	:	Wellenlänge
$k = 2\pi/\lambda$:	Wellenzahl
$\nu = 1/T$:	Frequenz
T	:	Schwingungsdauer
$\omega = 2\pi\nu = 2\pi/T$:	Kreisfrequenz

Für die Phasengeschwindigkeit c gilt

$$c = \omega/k = \lambda \cdot \nu. \quad (26)$$

Die Kugelwelle

$$u = \frac{u_0}{r} \cdot \sin(\omega t \pm kr) \quad (27)$$

Hier wird x durch r , dem Abstand vom Ursprung (bei punktförmigem Sender) ersetzt, um die Kugelsymmetrie zum Ausdruck zu bringen. *Warum nimmt hier die Amplitude mit $1/r$ ab?*

Die Ausbreitungsgeschwindigkeit von Schallwellen

Schallwellen sind im Allgemeinen longitudinale Wellen, d. h. die Ausbreitungsgeschwindigkeit c ist parallel zur Auslenkung der Teilchen. Nur in festen Körpern, die eine Scherelastizität (also ein Torsionsmodul) besitzen, können auch Transversalwellen (c senkrecht u) auftreten. Dabei hängen die elastischen Eigenschaften des Mediums unmittelbar mit der Größe der Schallausbreitungsgeschwindigkeit c zusammen. c ist die Geschwindigkeit eines Zustandes, nicht die eines Körpers und wird daher Phasengeschwindigkeit genannt.

Für die Schallgeschwindigkeit in einem stabförmigen Festkörper der Dichte ρ und mit dem Elastizitätsmodul E gilt für Longitudinalwellen

$$c_{\text{longitudinal}} = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (28)$$

bzw. für Transversalwellen

$$c_{\text{transversal}} = \sqrt{\frac{\tau}{\rho}}, \quad \tau : \text{Torsionsmodul.} \quad (29)$$

Die elastischen Eigenschaften von Flüssigkeiten und Gasen sind durch den Kompressionsmodul K bzw. die Kompressibilität $1/K$,

$$\frac{1}{K} = -\frac{1}{V} \cdot \frac{dV}{dp}, \quad p : \text{Druck,} \quad (30)$$

gekennzeichnet. Für die Schallgeschwindigkeit in Gasen erhält man in Analogie zum Festkörper

$$c = \sqrt{\frac{K}{\rho}}. \quad (31)$$

Für Gase kann der Kompressionsmodul über die Zustandsgleichung berechnet werden. Aus der adiabatischen Zustandsgleichung für ideale Gase $p \cdot V^\kappa = \text{const.}$ erhält man ($\kappa = C_p/C_V$)

$$c = \sqrt{\frac{\kappa \cdot p}{\rho}}. \quad (32)$$

Warum verwendet man hier nicht die Boyle-Mariottesche isotherme Zustandsgleichung $pV = nRT$? Die Messung der Schallgeschwindigkeit ermöglicht also die Ermittlung elastischer Eigenschaften des Trägermediums, im Falle von Gasen sogar Aussagen über die molekulare Struktur. Wie hängt κ mit dem Aufbau der Gasmoleküle zusammen? Über eine makroskopische Messung, wie sie die Messung der Schallgeschwindigkeit darstellt, sind also Aussagen darüber möglich, ob das untersuchte Gas aus ein-, zwei- oder n -atomigen Molekülen aufgebaut ist!

Siehe z. B. Bergmann-Schaefer, Bd. I.

Experiment

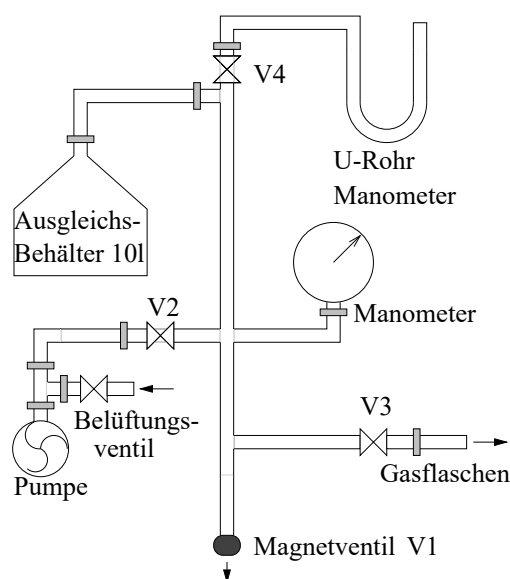
Messung des Adiabatenkoeffizienten nach Clement-Desormes

Wichtig: Die Pumpe darf nur bei geschlossenem Ventil V2 abgeschaltet werden, da sonst Öl in die Apparatur gesaugt wird. Zur Anordnung der Ventile ist vor Beginn des Versuchs die zuständige betreuende Person zu befragen. Auch die Gasflaschen werden von der betreuenden Person angeschlossen.

Vor dem Öffnen von Ventil V4 (zum U-Rohr-Manometer) ist auf dem Zeigermanometer zu überprüfen, ob der Druck ca. 760 Torr beträgt, also in etwa dem Umgebungsdruck entspricht – gelangt Wasser in das System, sind alle folgenden Messungen fehlerhaft!

Die Messungen werden mit Luft und sowie anderen Gasen (Ar und CO₂), die in Stahlflaschen zur Verfügung stehen, durchgeführt. Die nebenstehende Skizze zeigt den experimentellen Aufbau.

Das betrachtete thermodynamische System ist das Gas im Ausgleichsbehälter (10 Liter), dessen Druck und Volumen über das Rohrleitungs- und Ventilsystem von außen geändert werden kann. Der Ausgleichsbehälter selbst gehört nicht zum System. Er stellt ein Wärmebad auf Raumtemperatur dar.



1. Prüfen des Systems auf Dichtigkeit

Hierzu wird mit der Pumpe ein Vakuum erzeugt und ca. drei Minuten abgewartet, ob der Druck konstant bleibt. Dazu wird Ventil V2 geschlossen, sodass der Unterdruck im Ausgleichsbehälter bestehen bleibt. Zum Schluss wird wieder mit Ventil V3 belüftet.

2. Durchführung des Experimentes mit Luft

An den Flansch bei V3 wird der Gummiblasebalg angeflanscht. Mit Hilfe des Blasebalgs wird der Druck im Ausgleichsbehälter erhöht (es sind etwa 300 mm Wassersäule anzustreben) und das thermodynamische Gleichgewicht abgewartet (Ventil V3 schließen). Es folgt ein Temperaturengleich mit der Umgebung, wobei solange zu warten ist, bis die Druckänderung kleiner als die Ablesegenauigkeit ist. Die Luft ist nun in dem Zustand, der durch den Druck p_0 und das Volumen V_0 gekennzeichnet ist (Punkt A im $p - V$ -Diagramm, Abb. 2).

Jetzt wird das Magnetventil V1 mittels des Tasters geöffnet. Es schließt sich automatisch nach der am Potentiometer gewählten Zeit. Die Länge der Öffnungszeit t_a ist am Speicheroszilloskop abzulesen (s. u.). Dazu sollen die Knöpfe STORE und TRIGGER/AT gedrückt sein. Als Verstärkung stelle man etwa 5-10 V/DIV ein. Man regle den Triggerlevel so, dass beim Öffnen des Ventils der Elektronenstrahl zu laufen beginnt. Als Zeiteinstellung wähle man 0,05 - 0,1 s/DIV.

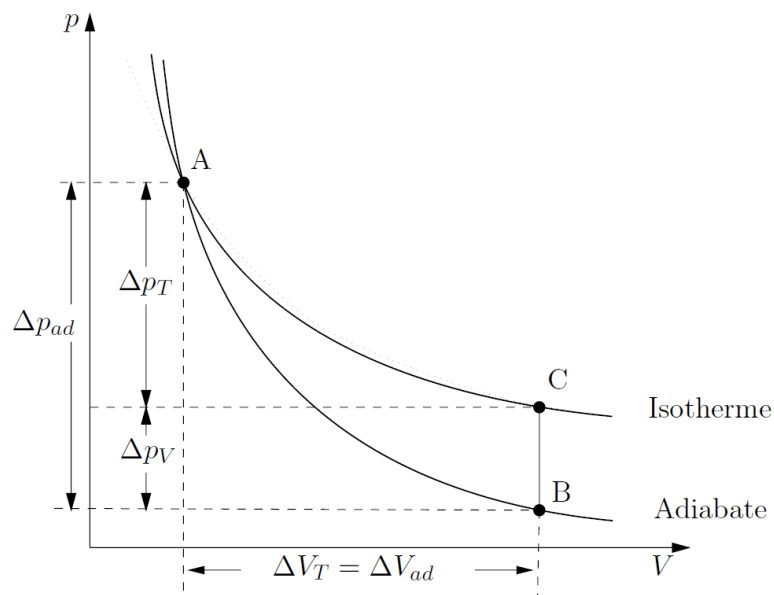


Abb. 2: Zustandsdiagramm nach Clement-Desormes

Wenn das Ventil schließt, ist dies auf dem Oszilloskopschirm zu sehen und abzulesen. Durch Öffnen von V1 erfolgt eine nahezu adiabatische Expansion. Der Druck sinkt um Δp_{ad} und das System befindet sich zunächst im Zustand B.

Der Temperatenausgleich mit dem Ausgleichsbehälter bewirkt dann eine Zustandsänderung von B nach C (im p - V -Diagramm, Abb. 2). Bei dem durchgeführten Experiment wird also die Druckdifferenz Δp_{ad} zwischen den Zuständen A und B vorgegeben und es resultiert ein $\Delta V = \Delta V_{ad}$. Könnte man, von A ausgehend, dasselbe ΔV durch isotherme Expansion des Systems erzeugen, so würde man zum Zustand C gelangen und den Messwert Δp_T gewinnen. Da nun der Druck eine Zustandsgröße ist, spielt der Weg, auf dem das System in den Zustand C gelangt, keine Rolle. Deshalb ergibt sich Δp_T als Differenz der Messwerte Δp_{ad} und Δp_V . Damit kann nun den Adiabatenkoeffizienten κ bestimmt werden.

Wiederholen Sie das Verfahren für mindestens sieben verschiedene Öffnungszeiten im gesamten Regelbereich des Potentiometers. Tragen Sie die auf diese Weise bestimmten Adiabatenkoeffizienten über der Öffnungszeit t_a auf. Welche Fehlermöglichkeiten zeigen sich in dieser Auftragsung (für kleine und große t_a)? Geben Sie κ sowie C_p und C_V mit ihren Fehlern an und vergleichen Sie diese mit Literaturwerten (Quellenangabe!). Ermitteln Sie aus dem experimentell bestimmten Adiabatenkoeffizienten die Anzahl der Freiheitsgrade und diskutieren Sie Ihre Ergebnisse.

3. Durchführung des Experimentes mit Argon und CO_2

Da die Drücke in diesem Versuchsteil nicht mit dem U-Rohr sondern mit dem Zeiger-Manometer gemessen werden, bleibt das Ventil V4 die ganze Zeit über geschlossen. Für die Messungen mit den beiden anderen Gasen muss der Ausgleichsbehälter und das gesamte Rohrleitungssystem mit dem jeweiligen Gas gespült werden: Die Leitung zur Gasflasche wird an den Flansch bei V3 angeschlossen. Das ganze System wird evakuiert und dann durch Öffnen von V3 mit dem Gas gefüllt (das Reduzierventil an der Gasflasche darf nur von der betreuenden Person bedient werden). Der Spülvorgang wird noch zweimal wiederholt.

Der Druck im Ausgleichsbehälter darf 1000 Torr nicht übersteigen. Führen Sie den Versuch analog zu der Messung mit Luft durch.

Messungen mit dem Kundtschen Rohr

Wichtig: Die Pumpe darf nur bei geschlossenem Ventil V2 abgeschaltet werden, da sonst Öl in die Apparatur gesaugt wird. Zur Anordnung der Ventile ist vor Beginn des Versuchs die zuständige betreuende Person zu befragen. Auch die Gasflaschen werden von der betreuenden Person angeschlossen.

Die Versuche mit dem Kundtschen Rohr sind aufgrund der Sicherheitsbestimmungen nur bei geschlossener Klappe durchzuführen!

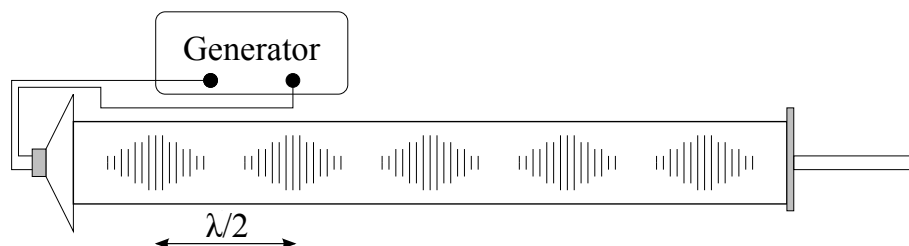


Abb. 3: Kundtsches Rohr

Aus den Staubfiguren im Kundtschen Rohr kann bei bekannter Frequenz (Kontrolle des Tongenerators mit dem Frequenzzähler) die Schallgeschwindigkeit in Gasen bestimmt werden. Dazu wird zunächst das Kundtsche Rohr evakuiert. Für die erste Messung wird das Rohr bis auf Atmosphärendruck mit Luft gefüllt. Der Lautsprecher und der Frequenzmesser wird mit dem niederohmigen Ausgang des Tongenerators verbunden. Es werden einige Frequenzen (mindestens drei bei jedem Gas) bestimmt, bei denen sich das Korkmehl zu den typischen Staubfiguren anordnet. Die Wellenlänge lässt sich mit dem am Rohr angebrachten Maßstab bestimmen. *Wie lässt sich der Ablesefehler minimieren?*

Danach wird die Messung mit Argon und Kohlenstoffdioxid wiederholt. Dazu werden die Gasflaschen angeflanscht und das Rohr auf ca. 1000 mbar gefüllt. Durch Ausmessen der Staubfiguren (Abb. 3) im Kundtschen Rohr wird für die drei Gase Luft, Kohlenstoffdioxid und Argon die Schallgeschwindigkeit und aus dieser der Adiabatenkoeffizient κ bestimmt. Diskutieren Sie Ihre Ergebnisse. *Eine Fehlerrechnung ist durchzuführen.*

$$\rho_{\text{Ar}} = 1,77 \text{ kg/m}^3 \quad , \quad \rho_{\text{CO}_2} = 1,98 \text{ kg/m}^3 \quad , \quad \rho_{\text{Luft}} = 1,20 \text{ kg/m}^3$$