

Die elastischen Konstanten

Das elastische Verhalten eines festen Körpers unter der Wirkung von außen angreifender Kräfte soll untersucht werden. Die wichtigsten charakteristischen Konstanten, der Elastizitätsmodul E und der Schub- oder Torsionsmodul G sollen bestimmt werden.

Vorkenntnisse

Potential – Potentialverlauf im zwischenatomaren Bereich – Parabolische (harmonische) Näherung im Minimum – Lineares Kraftgesetz – Elastische und plastische Verformung – Einfluss von Gitterfehlern – Thermische Ausdehnung – Elastizitäts-, Kompressions- und Torsionsmodul – Querkontraktion und Poisson'sche Zahl – Drehschwingungen – Richtmoment – Trägheitsmoment

Physikalische Grundlagen

Definition der elastischen Konstanten

An einem festen Körper, beispielsweise einem Draht der Länge L mit dem Querschnitt A , greife eine zu A senkrechte Kraft F an (Abb. 1 (a)). Dann ist innerhalb eines bestimmten Kraftbereiches die relative Längenänderung $\epsilon = \Delta L/L$ proportional zur Normalspannung $\sigma = F/A$, also $\epsilon \sim \sigma$. Aus dieser Beziehung folgt durch Einführung eines Proportionalitätsfaktors E das Hooke'sche Gesetz

$$\sigma = E \epsilon \quad (1)$$

für den Fall $L \gg \sqrt{A}$. Der Faktor E wird *Elastizitätsmodul* genannt. Er hat die Einheit N/m^2 , da ϵ dimensionslos ist.

Wirkt auf die Deckfläche A eines quaderförmigen Körpers, dessen Grundfläche festgehalten wird, parallel zu A und gleichmäßig auf die Fläche verteilt eine Kraft F , dann verschiebt sich die obere Fläche gegen die untere, und die zunächst senkrecht stehenden Seitenflächen werden um

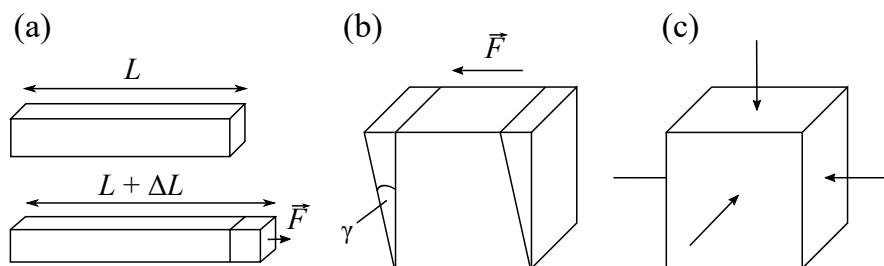


Abb. 1: Zeichnung zur Veranschaulichung des (a) Elastizitäts-, (b) Schub- und (c) Kompressionsmoduls.

den Scherungswinkel γ geneigt (Abb. 1 (b)). Für nicht zu große Scherungen ist der Winkel proportional zur Schubspannung $\tau = F/A$, also $\tau \sim \gamma$. Daraus folgt analog das Hooke'sche Gesetz der Scherung oder Torsion

$$\tau = G \gamma. \quad (2)$$

Der Proportionalitätsfaktor G heißt *Schub-* oder *Torsionsmodul*. Er hat dieselbe Einheit wie der Elastizitätsmodul E , also N/m^2 . Wirkt ein Druck $p = F/A$ allseitig und gleichmäßig auf die Oberfläche eines festen Körpers, dann ändert sich bei einer Drucksteigerung um dp das Volumen um den Betrag $-\Delta V$. Für nicht zu große Drücke ist die relative Volumenänderung $-\Delta V/V$ proportional zur Druckänderung und daher

$$dp = -K \frac{\Delta V}{V}. \quad (3)$$

Der *Kompressionsmodul* K hat ebenfalls die Einheit N/m^2 .

Die Poisson'sche Zahl

Bei der Zugbelastung eines Drahtes tritt nicht nur eine Längenänderung L , sondern auch eine Abnahme des Drahtdurchmessers d auf. Diese Durchmesseränderung definiert die sogenannte *Querkontraktion* δ , für die

$$\delta = \frac{\Delta d}{d} \quad (4)$$

gilt. Damit definiert man die *Poisson'sche Zahl* μ über

$$\mu = \frac{\delta}{\epsilon}. \quad (5)$$

Die Elastizitätstheorie liefert als Verknüpfung der verschiedenen Moduln die folgenden Gleichungen:

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)} \quad \text{und} \quad K = \frac{E}{3(1 - 2\mu)} \quad (6)$$

Experiment

Vorbereitende Aufgabe

Berechnen Sie die Poisson'sche Zahl eines inkompressiblen, quaderförmigen Körpers ($K \rightarrow \infty$) bei Längenänderung unter der Annahme, dass sich das Volumen nicht ändert.

1. Bestimmung des Elastizitätsmoduls für einen Messing- und einen Stahldraht

Für die Dehnungsmessungen wird die in Abb. 2 skizzierte Apparatur verwendet. Die Drähte werden in den Punkten A und B eingehängt. Über das Auflager D und die Hebel a und b wird auf die Drähte im Punkt A eine Kraft ausgeübt, wenn in D durch Auflegen von Bleistücken eine Last erzeugt wird. Beachten Sie dabei die Kraftverdopplung am Hebel ($a = 2b$). Die Längenänderung wird über den Hebel c auf eine Messuhr übertragen ($c = 2b$). Bei den auftretenden kleinen Längenänderungen können Winkeländerungen vernachlässigt werden.

Legen Sie zu Beginn der Messung zunächst eine Scheibe aus Messing mit einer Masse von ca. 1 kg zur Vorbelastung des Drahtes auf. Dies ist zum Ausgleich von Knicken im Draht erforderlich. Stellen Sie mit der Stellschraube S einen Anfangswert von etwa 2 mm auf der Messuhr ein. Messen Sie die Anfangslänge L mit einem Zollstock. Belasten Sie den Draht nun schrittweise durch Auflegen von Bleistücken. Die Massenangabe in Gramm ist in die Bleistücke eingeschlagen. Klopfen Sie vor dem Ablesen der Messuhr leicht auf den Tisch, um einer Verfälschung der Messung durch Reibung entgegenzuwirken. Vor der Messung sollte der Draht einmal maximal (mit allen Gewichten) beladen und wieder entlastet werden.

Achtung: Blei ist ein Schwermetall! Waschen Sie sich nach diesem Versuchsteil die Hände!

Führen Sie die Messungen bei zunehmender und dann bei abnehmender Belastung durch. Tragen Sie die Belastung in Gramm über der zugehörigen Längenänderung ΔL auf. Bei Gültigkeit des Hooke'schen Gesetzes ergibt sich dabei eine Gerade, aus deren Steigung C der Elastizitätsmodul bestimmt werden kann. Dazu wird die Steigung, die in der Dimension Masse/Länge vorliegt, durch Erweitern mit der Erdbeschleunigung g umgerechnet auf Kraft/Länge, also

$$m g = F = C g \Delta L. \quad (7)$$

Mit Hilfe von Gleichung (1) folgt daraus

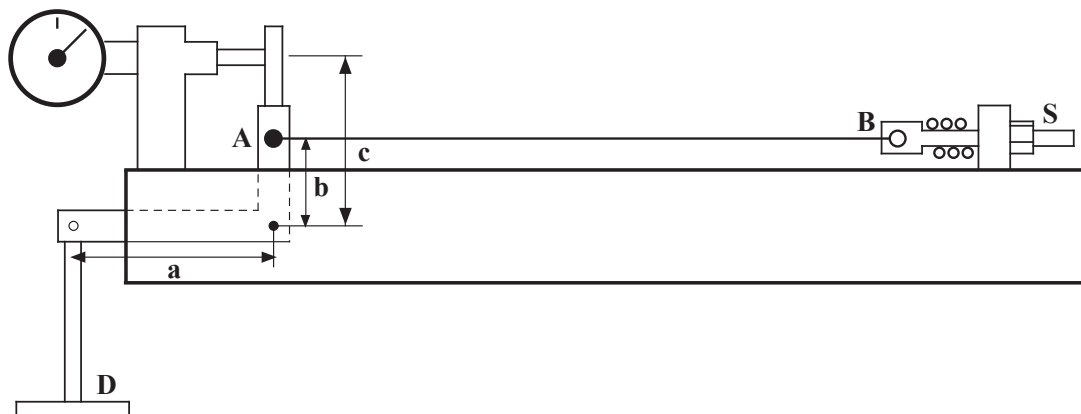


Abb. 2: Der Versuchsaufbau zur Bestimmung des Elastizitätsmoduls

$$F = AE \frac{\Delta L}{L} \quad \text{bzw.} \quad E = C \frac{gL}{A}. \quad (8)$$

Der Querschnitt des Drahtes A folgt aus seinem Durchmesser d . Messen Sie den Drahtdurchmesser mit einer Mikrometerschraube an zehn verschiedenen Stellen und bilden Sie aus den Messungen das arithmetische Mittel.

Wiederholen Sie die Messungen für den Stahldraht mit doppelter Vorbelastung (2 kg). Diskutieren Sie die Unterschiede anhand des Zug-Spannungsdiagramms.

2. Bestimmung des Torsionsmoduls für einen Messing- und einen Stahldraht.

Bestimmen Sie aus Drehschwingungen den Torsionsmodul der im ersten Versuchsteil verwendeten Drähte. Hängen Sie dazu an die Drähte eine Kreisscheibe und bringen Sie das so entstandene Torsionspendel durch leichtes Verdrillen des Drahtes aus seiner Ruhelage. Bestimmen Sie die Schwingungsdauer der einsetzenden Drehschwingung mit einer Stoppuhr. Messen Sie mehrmals die Dauer für jeweils fünf Schwingungen und bilden Sie daraus das arithmetische Mittel.

Neben den Abmessungen des Drahtes muss zur Bestimmung des Torsionsmoduls das Trägheitsmoment der Kreisscheibe ermittelt werden. Bestimmen Sie diese Größe aus ihren geometrischen Abmessungen und ihrer Masse. Das Trägheitsmoment ist dann über die Formel

$$\Theta = \int_V r^2 dm \quad (9)$$

(siehe Versuch „Trägheitsmomente starrer Körper / Kreisel“) zu bestimmen. Die Vorrichtung zum Befestigen der Drähte kann dabei im Rahmen der Messgenauigkeit vernachlässigt werden. Bei Kenntnis dieser Größen kann der Torsionsmodul daraus folgendermaßen berechnet werden: Betrachtet wird ein Hohlzylinder mit dem Radius r und der Wandstärke dr (Abb. 3). Eine Kraft dF verdreht die Stirnflächen um einen Winkel φ gegeneinander. Dann ergibt sich ein Scherungswinkel

$$\gamma \cong \tan \gamma = \frac{\varphi r}{L}. \quad (10)$$

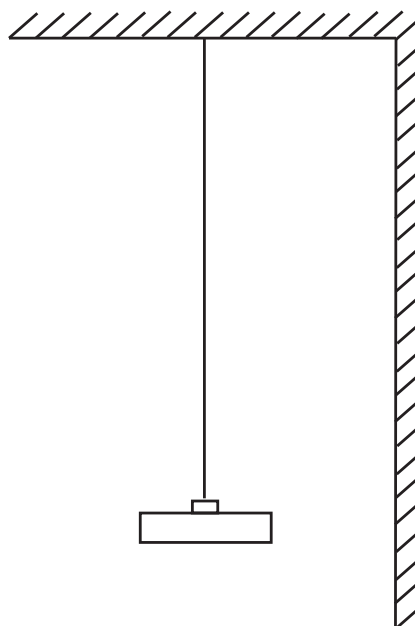
Die Schubspannung ist dem Scherungswinkel proportional, also gilt

$$\tau = \frac{dF}{dA} = \frac{dF}{2\pi r dr} = G\gamma = \frac{G\varphi r}{L}. \quad (11)$$

Für die Kraft dF folgt dann

$$dF = \frac{2\pi r^2 \varphi G}{L} dr. \quad (12)$$

über den Hebelarm r erzeugt sie ein Drehmoment dM



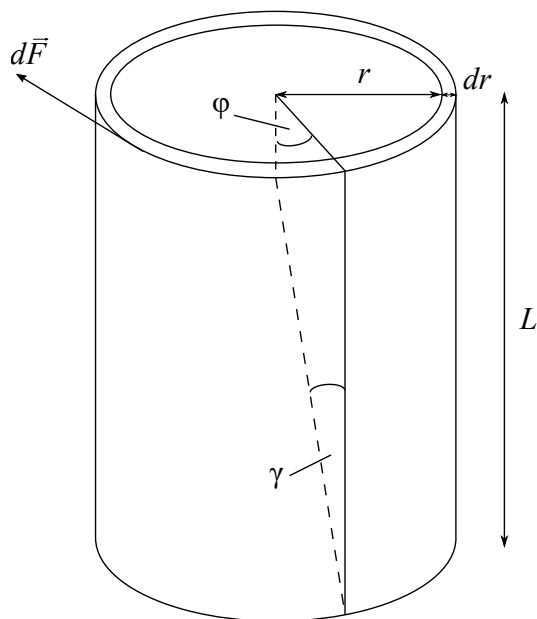


Abb. 3: Zur Berechnung des Torsionsmoduls aus Drahtschwingungen.

$$dM = r dF = \frac{2\pi r^3 \varphi G}{L} dr. \quad (13)$$

Für einen Vollzylinder (Draht) wird das Gesamtdrehmoment

$$M = \int_0^R dM = \frac{2\pi\varphi G}{L} \int_0^R r^3 dr = \frac{\pi\varphi GR^4}{2L}. \quad (14)$$

Daraus folgt:

$$G = \frac{2LM}{\pi\varphi R^4} \quad (15)$$

Die am Draht aufgehängte Kreisscheibe vollführt *harmonische* Schwingungen mit der Schwingungsdauer:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\Theta}{D}} \quad (16)$$

Dabei ist D das Richtmoment des Drahtes, d.h., das Drehmoment pro Winkeleinheit:

$$D = \frac{M}{\varphi} \quad (17)$$

Somit ergibt sich letztlich der Torsionsmodul zu

$$G = \frac{8\pi L\Theta}{R^4 T^2}. \quad (18)$$

Bestimmen Sie den Torsionsmodul für die im Experiment verwendeten Drähte. Diskutieren Sie Ihre Ergebnisse.