Trägheitsmomente starrer Körper / Kreisel

Mit Hilfe von Drehschwingungen sollen im ersten Teil des Versuchs für einen Würfel und einen Quader die Trägheitsmomente für verschiedene Drehachsen durch den Schwerpunkt gemessen werden. Das zugehörige Trägheitsellipsoid soll dargestellt und der Trägheitstensor berechnet werden. Zudem soll der Satz von Steiner experimentell verifiziert werden. Im zweiten Teil des Versuchs soll die Präzessionswinkelgeschwindigkeit an einem schnellen, schweren Kreisel als Funktion der Momente gemessen werden.

Vorkenntnisse

Newtonsche Mechanik – Translatorische Bewegung, Rotationsbewegung, Analogien – Trägheitsmoment – Drehmoment – Drehimpuls – Rotationsenergie – Trägheitstensor (allgemeine Berechnung) – Deviationsmomente – Trägheitsellipsoid – Satz von Steiner – Drehschwingungen – Kreisel – Präzession, Nutation

Physikalische Grundlagen

Eine Menge von Massenpunkten der Massen m_ν, die um ihren gemeinsamen Schwerpunkt dergestalt rotieren, dass sie ihre sämtlichen Abstände voneinander nicht verändern, bezeichnet man als starren Körper. Zu den wichtigsten, die Bewegung beschreibenden Größen dieses Systems gehört der Gesamtdrehimpuls $\vec{L}$ bezüglich des Schwerpunkts

$$\vec{L} \;=\; \sum_\nu m_\nu \left(\vec{r_\nu} \times \vec{v_\nu}\right) \tag{1}$$

mit $\vec{v_\nu}$ als Geschwindigkeiten der Massenpunkte und $\vec{r_\nu}$ als deren Ortsvektoren (hier mit dem Schwerpunkt im Koordinatenursprung). Einsetzen der Beziehung $\vec{v_\nu} = \vec{\omega} \times \vec{r_\nu}$ mit $\vec{\omega}$ als Winkelgeschwindigkeit ergibt

$$\vec{L} \;=\; \sum_\nu m_\nu \left(\vec{r_\nu} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r_\nu}\right)\right). \tag{2}$$

Es existiert demnach eine eindeutige funktionale Abhängigkeit $\vec{L}(\vec{\omega})$ des Drehimpulsvektors vom Vektor der Winkelgeschwindigkeit. Eine Umformung des doppelten Kreuzprodukts in Gleichung (2) ergibt

$$\vec{L} \;=\; \sum_\nu m_\nu \left[r_\nu^2 \,\vec{\omega} \;-\; \left(\vec{r_\nu} \cdot \vec{\omega}\right) \vec{r_\nu}\right] \tag{3}$$

Für die einzelnen Komponenten des Drehimpulses L_i mit $i = x, y, z$ folgt hieraus

$$L_i \;=\; \sum_{\nu} m_\nu \left[\left(\sum_{j=x,y,z} r_{\nu_j}^2 \right) \omega_i \;-\; \left(\sum_{j=x,y,z} r_{\nu_j} \omega_j \right) r_{\nu_i} \right] \tag{4}$$

$$L_i \;=\; \sum_{j=x,y,z} \sum_{\nu} m_\nu \left[\left(\sum_{k=x,y,z} r_{\nu_k}^2 \right) \delta_{ij} \;-\; r_{\nu_i} r_{\nu_j} \right] \omega_j,$$

wobei δ_{ij} das Kronecker-Symbol ist ($\delta_{ij}=1$ für $i=j$ und $\delta_{ij}=0$ für $i\neq j$). Die Beziehung zwischen $\vec{L}$ und $\vec{\omega}$ ist also linear. Die Abbildungsmatrix $\overset{\leftrightarrow}{\Theta}$ mit

$$\vec{L} \;= \overset{\leftrightarrow}{\Theta}\; \vec{\omega} \qquad \text{bzw.} \qquad L_i \;=\; \sum_{j=x,y,z} \Theta_{ij}\, \omega_j \tag{5}$$

wird als Trägheitstensor bezeichnet. Ein Vergleich von (4) und (5) liefert für die einzelnen Komponenten des Trägheitstensors Θ_{ij} $(i=x,y,z,\; j=x,y,z)$

$$\Theta_{ij} \;=\; \sum_{\nu} m_\nu \left[\left(\sum_{k=x,y,z} r_{\nu_k}^2 \right) \delta_{ij} - r_{\nu_i} r_{\nu_j} \right] \tag{6}$$

Für einen ausgedehnten Körper ist die Summe über die diskreten Massenpunkte durch ein Integral über infinitesimal kleine Massenstücke zu ersetzen

$$\Theta_{ij} \;=\; \int_V \left[\left(\sum_{k=x,y,z} r_k^2 \right) \delta_{ij} \;-\; r_i r_j \right] dm \tag{7}$$

Der Trägheitstensor ist symmetrisch (d.h. $\Theta_{ij} = \Theta_{ji}$). Zur Berechnung aller Trägheitsmomente bezüglich beliebiger Schwerpunktsachsen sind demnach nur sechs Integrale zu berechnen. Man unterscheidet hierbei die drei Diagonalelemente des Tensors (die Trägheitsmomente um die Koordinatenachsen)

$$\Theta_{xx} \;=\; \int_V \left(y^2 + z^2\right)\, dm, \qquad \text{usw.} \tag{8}$$

von den Nichtdiagonalelementen, den sogenannten *Deviationsmomenten*:

$$\Theta_{xy} \;=\; -\int_V xy\, dm \qquad ,\text{usw.} \tag{9}$$

Transformation auf die Hauptträgheitsachsen

Wie bei jeder Matrix hängt auch die Gestalt des Trägheitstensors von der Wahl des Koordinatensystems ab. Alle symmetrischen Matrizen besitzen ein orthogonales System von Eigenvektoren (siehe beispielsweise Kowalsky, Lineare Algebra, de Gruyter, Berlin, 1979). Bei der Darstellung des Trägheitstensors bezüglich des Koordinatensystems x', y', z', welches parallel zu den Richtungen der Eigenvektoren steht, bleiben nur die Diagonalelemente

$$\Theta_{x'x'} \;=\; \int_V (y'^2 + z'^2)\, dm, \quad \text{usw.} \tag{10}$$

übrig, wohingegen die Deviationsmomente

$$\Theta_{x'y'} \;=\; \int_V x'y'\, dm \;=\; 0, \quad \text{usw.} \tag{11}$$

verschwinden. *Welche physikalischen Eigenschaften besitzen die durch die Eigenvektoren des Trägheitstensors ausgezeichneten Drehachsen des Körpers?* Lässt man den Körper mit der Winkelgeschwindigkeit ω um die x'-Achse drehen (also $\vec{\omega} = (\omega, 0, 0)$), so gilt aufgrund der Eigenvektoreigenschaft von $\vec{\omega}$

$$\vec{L} = \overset{\leftrightarrow}{\Theta} \; \vec{\omega} \; = \; \Theta_{x'x'} \, \vec{\omega}. \tag{12}$$

$\vec{L}$ und $\vec{\omega}$ stehen parallel, was entscheidend ist für eine zeitlich stabile Drehachse (bei freier Drehung des Körpers im Raum) bzw. momentenfreier Drehung bei fest vorgegebener Drehachse. Die (mindestens drei) durch diese Parallelität von $\vec{L}$ und $\vec{\omega}$ ausgezeichneten Drehachsen heißen *Hauptträgheitsachsen*, die Eigenwerte $\Theta_{x'x'}$, $\Theta_{y'y'}$, $\Theta_{z'z'}$ werden als *Hauptträgheitsmomente* bezeichnet.
Ein Körper, dessen drei Hauptträgheitsmomente paarweise verschieden sind, heißt *unsymmetrischer Kreisel.* Sind hingegen genau zwei Hauptträgheitsmomente gleich (z.B. $\Theta_{x'x'} = \Theta_{y'y'} \neq \Theta_{z'z'}$), so spricht man von einem *symmetrischen Kreisel.* Sind alle drei Eigenwerte gleich sind, spricht man von einem *Kugelkreisel.* Bei einem solchen Körper ist jede beliebige Schwerpunktsachse eine Hauptträgheitsachse.

Trägheitsmoments um eine beliebige Schwerpunktsachse

Dreht sich der starre Körper um eine beliebige Schwerpunktsachse, deren Lage im Raum durch die Schnittwinkel α, β, γ mit den Koordinatenachsen definiert wird, so bezeichnet man die skalare Größe $\Theta_{\alpha\beta\gamma}$ mit der Eigenschaft

$$L_{\alpha\beta\gamma} \; = \; \Theta_{\alpha\beta\gamma} \, \omega_{\alpha\beta\gamma} \tag{13}$$

als Trägheitsmoment um diese Achse. $\omega_{\alpha\beta\gamma}$ ist hierbei der Betrag der Winkelgeschwindigkeit der Drehung um die besagte Achse, $L_{\alpha\beta\gamma}$ ist die Projektion des resultierenden Drehimpulses auf die Drehachse. $\Theta_{\alpha\beta\gamma}$ lässt sich sehr einfach mit Hilfe des Trägheitstensors bestimmen, wobei gilt

$$\Theta_{\alpha\beta\gamma} \; = \; \vec{e}_{\alpha\beta\gamma} \; \overset{\leftrightarrow}{\Theta} \; \vec{e}_{\alpha\beta\gamma}. \tag{14}$$

Hierbei stellt $\vec{e}_{\alpha\beta\gamma}$ den in Richtung der Drehachse weisenden Einheitsvektor dar (links vom Tensor als Zeilenvektor, rechts vom Tensor als Spaltenvektor zu schreiben). *Überlegen Sie sich den Zusammenhang zwischen Gleichungen (13) und (14).*

Das Trägheitsellipsoid

Verwendet man die Hauptträgheitsachsen als Koordinatensystem (angedeutet durch die gestrichenen Symbole), so lässt sich Gleichung (14) mit $\vec{e}_{\alpha'\beta'\gamma'} \; = \; (\cos\alpha', \; \cos\beta', \; \cos\gamma')$ schreiben als

$$\Theta_{\alpha'\beta'\gamma'} \; = \; \Theta_{x'x'} \cos^2\alpha' + \Theta_{y'y'} \cos^2\beta' + \Theta_{z'z'} \cos^2\gamma'. \tag{15}$$

Man führt nun den sogenannten Trägheitsradius

$$R_{\alpha'\beta'\gamma'} \; := \; \frac{1}{\sqrt{\Theta_{\alpha'\beta'\gamma'}}} \tag{16}$$

ein. Trägt man die Trägheitsradien wie in Abbildung 1 dargestellt in jede $(\alpha'\beta'\gamma')$-Richtung ein, so bilden die Endpunkte P eine Fläche zweiten Grades. *Welche Gestalt hat diese Fläche?*

$$\overline{OP} = R_{\alpha'\beta'\gamma'} = \frac{1}{\sqrt{\theta_{\alpha'\beta'\gamma'}}}$$

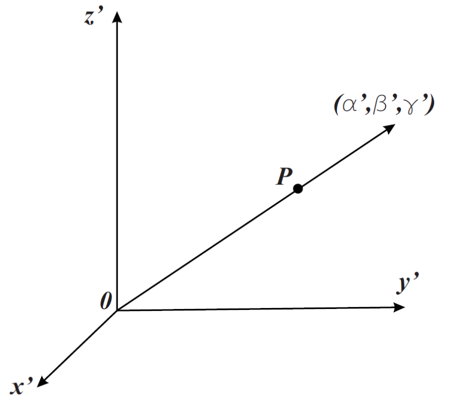


Abb. 1: Konstruktionsvorschrift für das Trägheitsellipsoid

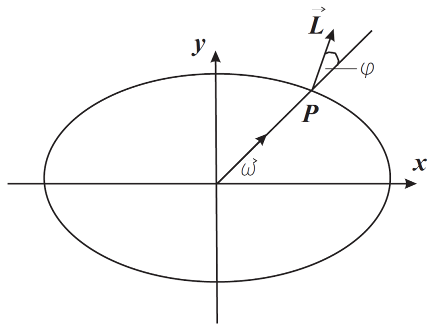


Abb. 2: Geometrische Konstruktion der Richtung von $\vec{L}$ bei gegebenen $\vec{\omega}$ mit Hilfe des Trägheitsellipsoids

Mit $x' = R_{\alpha'\beta'\gamma'} \cos\alpha'$ bzw. $\cos\alpha' = x' \sqrt{\Theta_{\alpha'\beta'\gamma'}}$ (entsprechend für y', β' bzw. z', γ') lässt sich Gleichung (15) umformen zu

$$\Theta_{x'x'}x'^2 + \Theta_{y'y'}y'^2 + \Theta_{z'z'}z'^2 = 1 \tag{17}$$

Die gesuchte Fläche zweiten Grades ist also ein Ellipsoid. Im Spezialfall eines symmetrischen Kreisels erhält man ein Rotationsellipsoid, im Fall eines Kugelkreisels eine Kugel. Mit Hilfe des Trägheitsellipsoiden lassen sich Richtung und Betrag von $\vec{L}$ bei gegebenem $\vec{\omega}$ einfach bestimmen (vergleiche Abbildung 2):

(i) *Richtung von $\vec{L}$*
Der Vektor $\vec{\omega}$ wird in den Koordinatenursprung gelegt. $\vec{L}$ hat dann die Richtung der Normalen an der im Durchstoßpunkt P errichteten Flächennormalen.

(ii) *Betrag von $\vec{L}$*
Die Entfernung vom Ursprung O zum Durchstoßpunkt P sei R und φ der Winkel zwischen $\vec{L}$ und $\vec{\omega}$. Dann ist

$$L = \frac{\omega}{R^2 \cos\varphi} \tag{18}$$

mit L und ω als Beträge der entsprechenden Vektoren.

Der Steiner'sche Satz

Bisher wurden ausschließlich Drehungen um Schwerpunktsachsen behandelt. Die Verallgemeinerung auf jede beliebige Drehachse bereitet jedoch keine großen Schwierigkeiten: Ist das Trägheitsmoment Θ_s eines Körpers um eine Drehachse durch den Schwerpunkt bekannt, so erhält man für eine dazu parallele, im Abstand a verlaufende Drehachse das Trägheitsmoment

$$\Theta_a = \Theta_s + ma^2 \qquad \text{(Satz von Steiner)} \tag{19}$$

mit m als Gesamtmasse des Körpers. Der Beweis kann zum Beispiel über den Energiesatz erfolgen. Die Rotationsenergie eines Körpers ist

$$E_{rot} \;=\; \tfrac{1}{2}\,\Theta\,\omega^2 \tag{20}$$

Für einen mit dem Abstand a um eine Drehachse rotierenden Massenpunkt dm gilt also

$$E_{rot} \;=\; \tfrac{1}{2}\,a^2\,dm\,\omega^2. \tag{21}$$

Rotiert ein ausgedehnter Körper der Masse m um eine Drehachse, die um die Strecke a vom Schwerpunkt entfernt ist, so dreht er sich bei jeder Umdrehung auch einmal um sich selbst. Seine Rotationsenergie ist also

$$E_{rot} \;=\; \tfrac{1}{2}\,\Theta_s\,\omega^2 \;+\; \tfrac{1}{2}\,ma^2\,\omega^2 \;=\; \tfrac{1}{2}\,\Theta_a\,\omega^2. \tag{22}$$

Der Kreisel

Die Bewegung eines starren Körpers kann stets aus einer Translation und einer Rotation zusammengesetzt werden. Wird diese allgemeine Bewegung derart beschränkt, dass ein Punkt des Körpers raumfest sein soll, so spricht man von einer Kreiselbewegung. Der Körper heißt dann Kreisel. Die Bewegungen des Kreisels können mittels des folgenden, sehr wichtigen physikalischen Gesetzes vollständig verstanden werden: Die Änderung des Drehimpulses $\vec{L}$ des rotierenden starren Körpers ist gleich der Summe der an ihm angreifenden Momente, d.h.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{L} = \sum_n \vec{M}_n. \tag{23}$$

Ist die Summe der Momente gleich Null, so folgt, dass sich der Drehimpuls nicht ändert, d.h. er bleibt in Betrag und Richtung konstant. Einen Kreisel, für den dies gilt, nennt man *kräftefreien* oder genauer *momentenfreien Kreisel*. Im Folgenden soll nur der einfache Spezialfall des *symmetrischen Kreisels* (starrer Körper mit Rotationssymmetrie) behandelt werden. Die Symmetrieachse heißt *Figurenachse*.

Die Nutation eines symmetrischen, momentenfreien Kreisels

Neben der Figurenachse unterscheidet man beim Kreisel zwei weitere, durch den Schwerpunkt gehende Achsen: die *Drehimpulsachse* und die *momentane Drehachse*. Erteilt man dem Kreisel einen Drehimpuls $\vec{L}$, der nicht parallel zur Figurenachse ist, so rotiert er mit der Winkelgeschwindigkeit $|\vec{\omega}|$ um die sogenannte momentane Drehachse. Die Richtung des Drehimpulses nennt man Drehimpulsachse.
Laut Voraussetzung bleibt der Drehimpuls konstant, also ändert auch diese Achse ihre Lage im Raum nicht. Die Vektoren $\vec{L}$ und $\vec{\omega}$ können in jeweils zwei Komponenten senkrecht und parallel zur Figurenachse zerlegt werden. Die Beziehung zwischen diesen Größen ist gegeben durch

$$\vec{L} = \hat{\Theta}\cdot\vec{\omega} \tag{24}$$

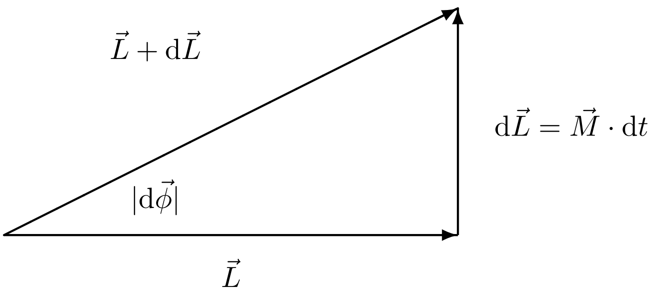
wobei $\hat{\Theta}$ der Trägheitstensor und $\vec{\omega}$ der Vektor der Winkelgeschwindigkeit ist. Diese Beziehung kann in die senkrecht und parallel zur Figurenachse liegenden Komponenten $\vec{L}_{\|}$ und $\vec{L}_{\perp}$ zerlegt werden mit

$$\vec{L}_{\|} = \hat{\Theta}_{\|}\cdot\omega_{\|} \qquad \text{und} \qquad \vec{L}_{\perp} = \hat{\Theta}_{\perp}\cdot\vec{\omega}_{\perp}. \tag{25}$$

Da im allgemeinen Fall $\vec{\Theta}_{\perp} \neq \vec{\Theta}_{\|}$ ist, wird der resultierende Vektor der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega} = \vec{\omega}_{\perp} + \vec{\omega}_{\|}$ *nicht* parallel zur Drehimpulsachse liegen. Deshalb müssen bei der Kreiselbewegung sowohl die Figurenachse als auch die momentane Drehachse die raumfeste Drehimpulsachse auf Kegelmänteln umkreisen. Diese allgemeine Bewegungsform des kräftefreien Kreisels wird als Nutation bezeichnet. Ein Kreisel ist nutationsfrei, wenn seine Figurenachse mit der Drehimpulsachse zusammenfällt.

Präzession eines Kreisels

Greift an einem Kreisel senkrecht zur Drehimpulsachse ein Moment an, bewirkt dieses eine Richtungsänderung von $\vec{L}$. Die Drehimpulsachse ist nicht mehr raumfest, sondern bewegt sich ihrerseits auf einem raumfesten Kegelmantel. Diese Bewegung heißt Präzession. Die Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}_\mathrm{p}$, mit der die Drehimpulsachse den Präzessionskegel umläuft, lässt sich sehr einfach für den Spezialfall eines symmetrischen, schnellen Kreisels (Drehimpulsachse $\approx$ Figurenachse) berechnen:



$$|\mathrm{d}\vec{L}| = |\vec{L}| \cdot |\mathrm{d}\vec{\phi}| = |\vec{M}| \cdot \mathrm{d}t$$

$$\rightarrow |\omega_\mathrm{p}| = \frac{|\mathrm{d}\vec{\phi}|}{\mathrm{d}t} = \frac{|\vec{M}|}{|\vec{L}|}$$

Den Drehsinn der Präzession findet man mit $\mathrm{d}\vec{L} = \vec{M} \cdot \mathrm{d}t$. *Wie liegt $\vec{\omega}_\mathrm{p}$?* Die allgemeine Bewegung eines Kreisels besteht aus Präzession und Nutation und kann somit sehr komplizierte Formen annehmen.

Experiment

Experimentelle Bestimmung des Trägheitsmoments eines starren Körpers

Das Trägheitsmoment lässt sich experimentell aus Drehschwingungen bestimmen. Setzt man für die Schwingungen eine harmonische Differentialgleichung der Form

$$\Theta\,\ddot{\varphi} \;+\; D\,\varphi \;=\; 0 \tag{26}$$

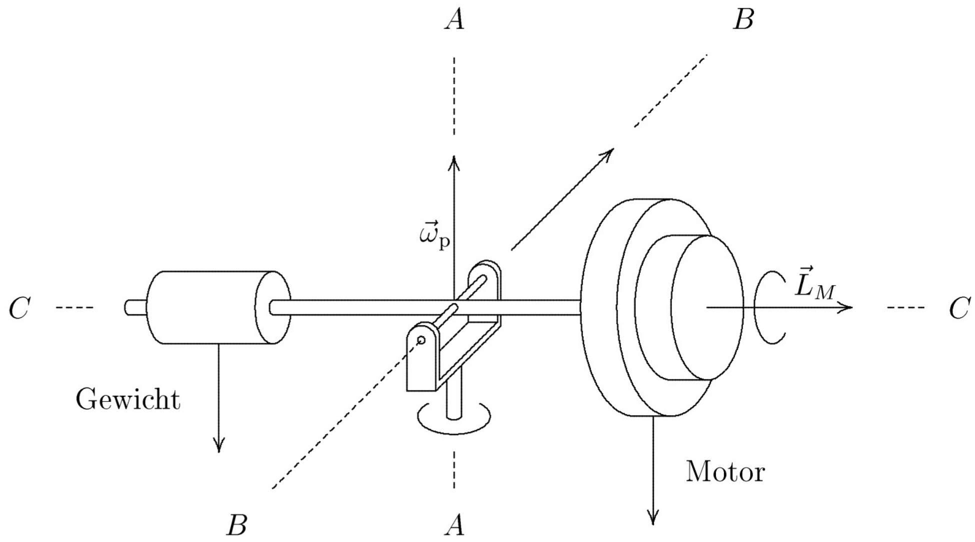
ohne Berücksichtigung von Reibung an, so gilt für die Periodendauer einer solchen Schwingung

$$T \;=\; 2\pi\,\sqrt{\tfrac{\Theta}{D}}. \tag{27}$$

Dabei ist D das Richtmoment der Versuchsanordnung. Das beim Versuch verwendete Schwingungssystem ist in Abbildung 3 dargestellt. In zwei senkrecht aufgehängte Torsionsdrähte werden die zu untersuchenden Körper mit Hilfe eines Kreisrings eingehängt. Durch Auslenken dieses schwingfähigen Systems aus seiner Ruhelage und anschließendes Loslassen führt der Körper Drehschwingungen aus. Das Trägheitsmoment kann durch Messen der Periodendauer (vgl. Gleichung (27)) bestimmt werden.

Präzession eines Kreisels

Im zweiten Teilversuch wird ein sogenannter *schwerer Kreisel* benutzt. Bei diesem werden die Momente durch die Schwerkraft erzeugt. Ein mit 50 Umdrehungen pro Sekunde laufender Synchronmotor mit künstlich vergrößertem Trägheitsmoment liefert den Drehimpuls vom Betrag



$|\vec{L}_\mathrm{Motor}| = \Theta_\mathrm{Motor} \cdot |\vec{\omega}_\mathrm{Motor}|$. Der Drehimpulsvektor liegt zunächst exakt in der Figurenachse der Anordnung. Der Kreisel steht unter dem Einfluss von durch die Schwerkraft verursachten Momenten.

Das vom Eigengewicht des Motors verursachte Moment sei $\vec{M}_\mathrm{Motor}$. Mit Hilfe eines auf einer Stange verschiebbaren Gewichts kann ein weiteres Moment erzeugt werden, mit dessen Hilfe $\vec{M}_\mathrm{Motor}$ kompensiert oder sogar überkompensiert werden kann. Zum Einstellen eines bestimmten Abstands des Gewichts hat die Stange Markierungen in cm-Abständen.

Beginnt die obige Anordnung zu präzidieren, kommt ein zusätzlicher Drehimpuls zustande. Seine Richtung liegt parallel zur Winkelgeschwindigkeit der Präzession. Das Trägheitsmoment um die Achse AA sei Θ_A. Gilt jedoch $\Theta_\mathrm{A} \cdot |\vec{\omega}_\mathrm{p}| \gg \Theta_\mathrm{Motor} \cdot |\vec{\omega}_\mathrm{Motor}|$, kann der Kreisel als schneller Kreisel betrachtet werden. Für die Winkelgeschwindigkeit der Präzession gilt dann

$$|\vec{\omega}_\mathrm{p}| = \frac{|M_\mathrm{result}|}{|\vec{L}_\mathrm{Motor}|} \qquad \text{mit} \qquad |M_\mathrm{result}| = |M_\mathrm{Motor}| - |M_\mathrm{Gewicht}|. \tag{28}$$

Versuchsaufgaben

1. Bestimmung des Richtmoments D mit Hilfe des Satzes von Steiner

Das in Abbildung 4 skizzierte System aus zwei senkrecht zueinander stehenden Messingstangen wird in die Torsionsfäden eingehängt. Setzen Sie nun zwei Messingklötze symmetrisch auf die horizontale Stange auf (bestimmen Sie auch die Massen der Gewichte). Um das genaue Aufsetzen der Messingklötze zu erleichtern, ist die horizontale Stange mit Kerben im Abstand von $10\,mm$ versehen, in welche die in Abbildung 4 skizzierten Spitzen der Klötze eingreifen.
Bestimmen Sie – beginnend mit dem kleinstmöglichen Abstand von der Drehachse – die Schwingungsdauer T für alle einstellbaren Abstände von der Drehachse r. Dabei soll die Schwingungsdauer dreimal für je 20 Schwingungen mit einer am Versuchsplatz ausliegenden Stoppuhr gemessen werden.

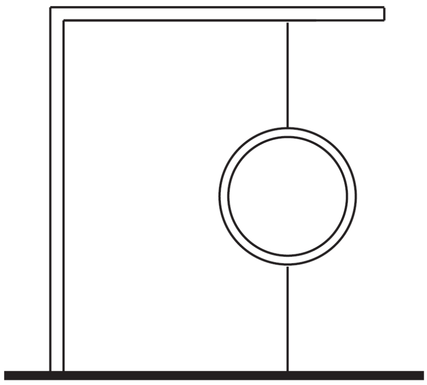


Abb. 3: Skizze der Versuchsanordnung

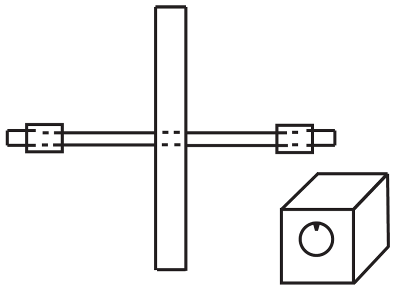


Abb. 4: Spezielle Anordnung zur Überprüfung des Steiner'schen Satzes

Stellen Sie für die Auswertung T^2 als Funktion von r^2 graphisch dar. Aus der Steigung der sich so ergebenden Geraden kann das Richtmoment D der Torsionsfäden berechnet werden. Mit Hilfe des Satzes von Steiner ergibt sich für die Schwingungsdauer T der Zusammenhang

$$T^2 \;=\; 4\pi^2\,\frac{\Theta_0 + mr^2}{D}. \tag{29}$$

Hierbei ist Θ_0 das Trägheitsmoment für Stangen und Klötze für $r = 0$ und m die Summe der Massen beider Klötze. Es gilt demnach für die Steigung q der Geraden $T^2(r^2)$

$$q \;=\; 4\pi^2\,\frac{m}{D}. \tag{30}$$

2. Bestimmung des Trägheitsmoments eines Würfels für verschiedene Drehachsen

Für die Messungen am Würfel sind zwei gleichartige Würfel mit unterschiedlicher Orientierung in Kreisringe eingebaut. Bestimmen Sie zunächst das Trägheitsmoment des Kreisringes mit der Aufhängevorrichtung. Dazu steht ein leerer Kreisring zur Verfügung, der den anderen in Abmessung und Gewicht im Rahmen der Messgenauigkeit entspricht. Er wird in die Torsionsfäden eingehängt und die Periodendauer der Drehschwingungen dreimal für jeweils 20 Schwingungen gemessen. Mit Hilfe des in Aufgabe 1 bestimmten Richtmoments kann daraus das Trägheitsmoment des Kreisrings samt Aufhängevorrichtung, Θ_0, berechnet werden.
Hängen Sie anschließend die Ringe mit den Würfeln nacheinander in das System ein. Die zur Befestigung der Würfel dienenden kleinen Stangen sollen dabei vernachlässigt werden. Durch

Versetzen der Halterungen können die Drehachsen um jeweils $\Delta\varphi = 15°$ gedreht werden. Entspannen Sie die Torsionsdrähte vor jedem Versetzen! Aufgrund der Symmetrie der Würfel genügt es, die Trägheitsmomente nur innerhalb eines Quadranten zu bestimmen.
Messen Sie die Schwingungsdauer T dreimal für je 20 Schwingungen für jede gewählte Orientierung und bestimmen Sie aus den jeweiligen Schwingungsdauern das zur entsprechenden Drehachse gehörende Trägheitsmoment $\Theta(\varphi)$. Es gilt hierbei

$$\Theta(\varphi) \;=\; \frac{DT^2}{4\pi^2} \;-\; \Theta_0, \tag{31}$$

wobei Θ_0 das anfangs bestimmte Trägheitsmoment des Kreisrings mit Aufhängung darstellt. Tragen Sie den Trägheitsradius $R(\varphi) = \Theta(\varphi)^{-1/2}$ über dem jeweiligen Winkel φ in Polarkoordinaten auf. Auf diese Weise erhalten Sie den Schnitt des Trägheitsellipsoiden mit der Ebene des Kreisrings der Aufhängevorrichtung.
Stellen Sie zudem den Trägheitstensor sowohl ausgehend von den Messergebnissen als auch durch direkte Berechnung (Masse des Würfels: $527\,g$). Die Darstellung erfolgt zweckmäßig bezüglich den Hauptträgheitsachsen als Koordinatensystem. Diskutieren Sie Ihre Ergbnisse.

3. Bestimmung des Trägheitsmoments eines Quaders für verschiedene Drehachsen

Wiederholen Sie Versuch 2 für den Quader. Bei der Berechnung des Trägheitstensors ist zu beachten, dass der Quader durch seine Abmessungen als aus zwei Würfeln bestehend betrachtet werden kann. Dadurch erleichtert die Anwendung des Satzes von Steiner die direkte Berechnung der Trägheitsmomente.

4. Kreisel

Demonstrativer Teil

(a) **Die Erhaltung des Drehimpulses im momentenfreien Fall:** Kompensieren Sie das vom Motor verursachte Moment durch eine entsprechende Anordnung des Gewichts. (Ein Kriterium hierfür ist das Verschwinden der Präzession!) Jetzt kann der Kreiselfuß beliebig gedreht und gekippt werden, ohne dass der Drehimpuls seine Richtung ändert. *Geben Sie Beispiele für die technische Anwendung dieses Verhaltens an. Benutzen Sie den eingestellten Zustand zudem für die Ermittlung von* $|\vec{M}_{\text{Motor}}|$. Das Gewicht ist deshalb zu wiegen und seine Dicke mit einem Messschieber zu messen. Berechnen Sie das daraus folgende Drehmoment.

(b) **Nutation im momentenfreien Fall:** Der Kreisel ist nahezu nutationsfrei konstruiert. Erteilt man dem Kreiselsystem einen zusätzlichen Drehimpuls durch einen *kurzen* Stoß senkrecht zur ursprünglichen Drehimpulsrichtung, wird die Nutationsbewegung sofort sichtbar. Sie klingt jedoch bald als Folge der Lagerreibung ab.

(c) **Nutation und Präzession:** Wie bei Messung (b) kann auch im Fall der Einwirkung von Momenten die Nutation vorgeführt werden. Hierzu ist es zweckmäßig, mit einer großen Winkelgeschwindigkeit der Präzession ω_{p} zu arbeiten. Verschieben Sie dazu das Gewicht bis zum Lager hin oder bis an das Ende des Balkens.

Quantitativer Teil

Messen Sie die Winkelgeschwindigkeit der Präzession als Funktion des am Kreisel angreifenden Moments für mindestens 10 verschiedene Momente. Es gilt

$$|\vec{\omega}_{\mathrm{p}}| = \frac{|\vec{M}_{\mathrm{Motor}}| - |\vec{M}_{\mathrm{Gewicht}}|}{\Theta_{\mathrm{Motor}} \cdot |\vec{\omega}_{\mathrm{Motor}}|}. \tag{32}$$

Da $\Theta_{\mathrm{Motor}} \cdot |\vec{\omega}_{\mathrm{Motor}}|$ eine Konstante ist und außerdem $|\omega_{\mathrm{p}}| = 2\pi/T_{\mathrm{p}}$ gilt, folgt

$$\frac{1}{T_{\mathrm{p}}} = \frac{|\vec{M}_{\mathrm{Motor}}| - |\vec{M}_{\mathrm{Gewicht}}|}{2\pi \cdot \Theta_{\mathrm{Motor}} \cdot |\vec{\omega}_{\mathrm{Motor}}|}. \tag{33}$$

Es besteht also ein linearer Zusammenhang zwischen $1/T_{\mathrm{p}}$ und $|M_{\mathrm{result}}|$. Tragen Sie daher $1/T_{\mathrm{p}}$ über $|M_{\mathrm{result}}|$ auf und bestimmen Sie das Trägheitsmoment aus der Steigung der sich ergebenden Geraden. Der Vorzeichenwechsel von $\vec{\omega}_{\mathrm{p}}$ kann in der Auftragung formal durch negative $1/T_{\mathrm{p}}$-Werte berücksichtigt werden.