Pohlsches Pendel

Am Pohlschen Pendel, einem schwingenden System mit einem Freiheitsgrad, sollen freie und erzwungene Drehschwingungen mit und ohne Dämpfung untersucht werden. Insbesondere soll hierbei die Erscheinung der mechanischen Resonanz studiert werden.

Vorkenntnisse

Grundgesetze der Mechanik: Die Newton'schen Grundgesetze der Mechanik – Die Erhaltungssätze der Mechanik (Impuls, Drehimpuls, Energie) – Aufstellen und Bedeutung von Bewegungsgleichungen – Formale Ähnlichkeiten zwischen den Gesetzen der Translations- und Rotationsbewegung

Grundgrößen: Kenntnisse über Geschwindigkeit, Beschleunigung, Kraft, Impuls, Winkelgeschwindigkeit, Drehimpuls, Drehmoment, Trägheitsmoment, kinetische Energie im Falle der Translation und der Rotation

Schwingungen: Schwingung (Amplitude, Schwingungsdauer, Kreisfrequenz) – Reibung – Differentalgleichungen (DGL) für harmonische Schwingungen, insbesondere für Drehschwingungen, ungedämpfte und gedämpfte freie Schwingungen, erzwungene Schwingungen, Resonanz, Phasenlage zwischen Erreger und Resonator – Einfluß der Dämpfung, Dämpfungsfaktor, logarithmisches Dekrement

Physikalische Grundlagen

Bewegungsgleichung von Drehschwingungen

Aus dem Drehimpulssatz

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(\Theta \cdot \dot{\Phi})}{\mathrm{d}t} = \sum_n M_n$$

erhält man die Bewegungsgleichung eines Körpers mit einem Freiheitsgrad für Drehbewegungen. Dabei sind:

Θ	:	Trägheitsmoment des Körpers bezüglich der Drehachse
Φ	:	Drehwinkel
$\dot{\Phi} = \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$	:	Winkelgeschwindigkeit
M_n	:	die einzelnen am System angreifenden Drehmomente

Die Bewegungsgleichung lautet dann allgemein

$$\Theta \cdot \ddot{\Phi} = \sum_n M_n. \tag{1}$$

Bei Kenntnis des Körpers, d.h. seines Trägheitsmomentes, der von außen an ihm angreifenden Drehmomente und seiner Anfangsbedingungen, lassen sich durch Lösen der Bewegungsgleichung Aussagen über seinen Bewegungszustand zu einem beliebigen Zeitpunkt machen. *Wie sieht die Bewegungsgleichung bei Translationsbewegungen aus? Verdeutlichen Sie sich die Zusammenhänge zwischen beiden Bewegungsgleichungen.*

Im Allgemeinen kommen als Drehmomente in Frage:

$M_1 = D(\Phi)$	Rückstelldrehmoment (Direktionsmoment)
$M_2 = R(\dot{\Phi})$	durch Reibung hervorgerufenes Moment
$M_3 = E(t)$	Erregerdrehmoment

In der Regel sind D und R *nicht-lineare* Funktionen von Φ und $\dot{\Phi}$. Die daraus resultierenden Differentialgleichungen sind dann nur sehr selten analytisch lösbar. Oft kann man sich jedoch, wie auch am Beispiel des Pohlschen Pendels, auf die linearen Terme beschränken und die höherer Ordnung vernachlässigen. Man erhält so eine Differentialgleichung der Form

$$\ddot{x} + a\dot{x} + bx = 0, \tag{2}$$

deren Lösung von der Form $x(t) = c \cdot e^{\mathrm{i}\lambda t}$ ist, wobei λ eine komplexe Zahl ist.

1. Freie, ungedämpfte Schwingungen

Es sei $E(t) = 0$ und $R(\dot{\Phi}) = 0$. Die Kennlinien der Rückstelldrehmomente $D = D(\Phi)$ können sein:

1. lineare Kennlinien (lineare Schwinger) $D = -D^* \cdot \Phi$
   (z.B. Flüssigkeit im U-Rohr, Zykloidenpendel). Das negative Vorzeichen berücksichtigt, dass das Rückstellmoment der Bewegungsrichtung entgegenwirkt. D^* ist das sogenannte Direktionsmoment.

2. nichtlineare Kennlinien im allgemeinen Fall, z.B. beim mathematischen Pendel. Um die Differentialgleichung möglichst einfach zu gestalten, linearisiert man diese Kennlinien, indem man sich auf den Fall kleiner Pendelausschläge beschränkt.

In diesem Fall lautet die Schwingungsgleichung

$$\Theta \cdot \ddot{\Phi} + D^* \cdot \Phi = 0 \tag{3}$$

mit der allgemeinen Lösung

$$\Phi(t) = A_1 \cos(\omega_0 t) + A_2 \sin(\omega_0 t) \qquad \text{wobei} \qquad \omega_0^2 = \frac{D^*}{\Theta} \tag{4}$$

Lineare Kennlinie und harmonische Schwingung bedingen sich wechselseitig. ω_0 ist die Eigenfrequenz des Schwingungssystems, d.h. mit dieser Frequenz schwingt das ungedämpfte System, wenn es einmal angestoßen wird.

2. Freie gedämpfte Schwingungen

Es sei wieder $E(t) = 0$, aber $R(\dot{\Phi}) \neq 0$. Die Reibungskräfte sollen in Bahnrichtung liegen und der Bewegung stets entgegengerichtet sein. Zudem sollen sie linear mit der Geschwindigkeit zunehmen, also $R = -R^* \cdot \dot{\Phi}$ (das gilt z.B. für die im Versuch verwendete Wirbelstrombremse, *nicht* jedoch für Luftreibung, für die bei großen Geschwindigkeiten $R \propto \dot{\Phi}^2$ gilt). Die Schwingungsgleichung lautet für diesen Fall

$$\ddot{\Phi} + 2\delta\dot{\Phi} + \omega_0^2\Phi = 0 \qquad \text{mit} \qquad \text{mit}\delta = \frac{R^*}{2\Theta}. \tag{5}$$

Die allgemeine Lösung dieser Gleichung lautet

$$\Phi(t) = \mathrm{e}^{-\delta \mathrm{t}} \cdot (\mathrm{B}_1 \cos(\omega \mathrm{t}) + \mathrm{B}_2 \sin(\omega \mathrm{t})) \qquad \text{mit} \qquad \omega^2 = \omega_0^2 - \delta^2 \tag{6}$$

Dies ist eine exponentiell abklingende harmonische Schwingung. δ heißt deshalb *Abklingkonstante.* Als weiteres Maß für die Dämpfung definiert man das logarithmische Dekrement λ als

$$\lambda = \ln\left(\frac{\Phi_k}{\Phi_{k+1}}\right) = \delta \cdot T. \tag{7}$$

Dabei bezeichnet Φ_k den k. maximalen Ausschlag des Schwingers, Φ_{k+1} den darauffolgenden maximalen Ausschlag in derselben Auslenkungsrichtung. Die allgemeine Lösung $\Phi(t)$ erlaubt es, drei Schwingungsfälle zu untersuchen:

1. Im Falle der **schwachen Dämpfung** ($\delta^2 \ll \omega_0^2$) erhält man den Schwingfall. Die Eigenschwingung des freien, gedämpften Pendels ist somit eine harmonische Schwingung zeitlich expontentiell abklingender Amplitude. Die Eigenfrequenz ω stimmt bei kleiner Dämpfung ($\delta^2 \ll \omega_0^2$) nahezu mit der des ungedämpften Falls ω_0 überein.

2. Bei **starker Dämpfung** erhält man keine Schwingung mehr, sondern den sogenannten *Kriechfall* ($\delta^2 > \omega_0^2$). Wird das Pendel aus der Ruhelage ausgelenkt und losgelassen, geht der Ausschlag exponentiell gegen Null. Die Bewegung des Pendels verläuft aperiodisch.

3. Zwischen diesen beiden Fällen liegt der **aperiodische Grenzfall** ($\delta^2 = \omega_0^2$). Wie im Fall der starken Dämpfung verläuft die Bewegung des Pendels aperiodisch. Für den aperiodischen Grenzfall ist die Zeit, in der die Auslenkung auf Null abgefallen ist, minimal.
   Gibt es sinnvolle Anwendungen hierfür? Welche?

3. Erzwungene, gedämpfte Schwingungen

Nun sei ein am System angreifendes Erregermoment $E(t) = A_0 \cdot \cos(\Omega t)$ vorhanden. Die Schwingungsgleichung lautet dann

$$\ddot{\Phi} + 2\delta\dot{\Phi} + \omega_0^2\Phi = \frac{A_0}{\Theta}\cos\Omega t. \tag{8}$$

Ihre allgemeine Lösung setzt sich additiv aus der Lösung der homogenen Gleichung Φ_{homogen} ($E(t) = 0$) und einer partikulären Lösung $\Phi_{\text{partikulär}}$ der inhomogenen Gleichung ($E(t) \neq 0$) zusammen. Es gilt

$$\Phi = \Phi_{\text{homogen}} + \Phi_{\text{partikulär}}. \tag{9}$$

Die Lösung der homogenen Differentialgleichung ist bereits erfolgt (s.o. Lösung für die freie gedämpfte Schwingung). Für die inhomogene Gleichung ist der Ansatz einer partikulären Lösung

$$\Phi_{\text{partikulär}} = P_1 \cos(\Omega t) + P_2 \sin(\Omega t). \tag{10}$$

Durch Einsetzen und Koeffizientenvergleich folgt

$$P_1 = \frac{(\omega_0^2 - \Omega^2)A_0}{N\Theta} \quad , \quad P_2 = \frac{2\delta\Omega A_0}{N\Theta} \qquad \text{mit} \qquad N = (\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\delta\Omega)^2. \tag{11}$$

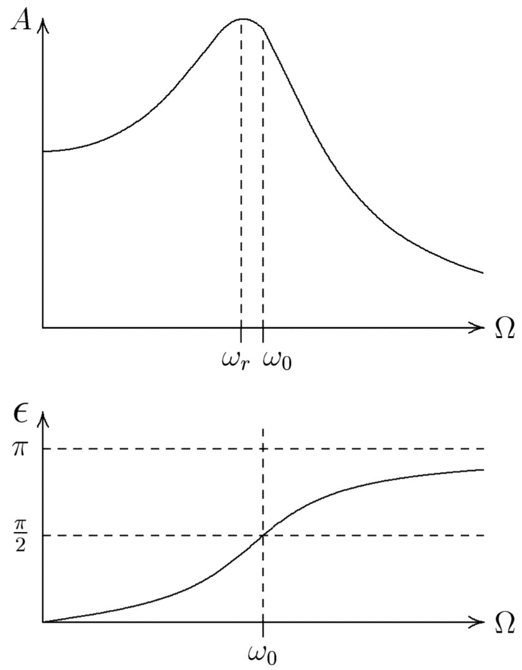
Die gesamte Lösung besteht also aus einer Überlagerung einer gedämpften Schwingung mit der Frequenz ω und einer Schwingung mit der Erregerfrequenz Ω. Der erste Anteil verschwindet wegen des Faktors $\mathrm{e}^{-\delta \mathrm{t}}$ nach hinreichend langer Zeit (sog. *Einschwingvorgang*). Danach schwingt das System (dessen Eigenfrequenz ω_0 ist) mit derselben Frequenz Ω wie der Erreger. Dabei stellt sich eine stationäre Amplitude des Schwingers ein. Zur besseren Übersicht soll der partikuläre Anteil in der Form

$$\Phi_{\text{partikulär}} = A \cos(\Omega t - \epsilon) \tag{12}$$

dargestellt werden, wobei ϵ die Phasenverschiebung zwischen Erreger und Resonator ist. Die Rechnung liefert als Lösung für A und ϵ

$$A = \frac{A_0}{\Theta} \cdot \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\delta\Omega)^2}} \qquad \text{und} \qquad \epsilon = \arctan\left(\frac{2\delta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}\right). \tag{13}$$

Die stationäre Amplitude A bei der erzwungenen Schwingung ist also eine Funktion der Erregerfrequenz Ω. Sie hat ein Maximum bei der Frequenz $\Omega = \omega_{\mathrm{r}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$ (Resonanzfrequenz), die nur wenig unterhalb der Eigenfrequenz ω_0 liegt. Im Falle kleiner Dämpfung gilt also $\omega_{\mathrm{r}} \approx \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \approx \omega_0$. Die Resonanzkurve $A(\Omega)$ verläuft nicht symmetrisch im die Resonanzfrequenz.
Das Maximum $\Phi_{\max} = A_0/(2\,\omega_{\mathrm{r}}\,\delta\,\Theta)$ ist mit zunehmender Dämpfung weniger ausgeprägt. Die Phasenverschiebung ϵ variiert ebenfalls mit der Erregerfrequenz und mit der Dämpfung. Sie hat den Wert $\pi/2$ bei $\Omega = \omega_0$.



Experiment

Das Pohlsche Pendel besteht aus einer kreisförmigen Metallscheibe, die um ihre Hauptachse drehbar gelagert und durch eine Spiralfeder an eine Ruhelage gebunden ist (siehe Abbildung 1). Durch Auslenken des Pendels aus der Ruhelage und anschließendes Loslassen führt es freie und idealerweise ungedämpfte Schwingungen um die Hauptachse aus. Die Eigenfrequenz des Pendels hängt vom Trägheitsmoment der Scheibe Θ sowie vom Richtmoment der Spiralfeder D^* ab.
Über eine Wirbelstrombremse kann die Schwingung des Pendels gedämpft werden, wobei die Stärke der Dämpfung über die Stromstärke I variiert werden kann, mit der die Wirbelstrombremse betrieben wird. Mit Hilfe eines Motors kann auf das Pendel ein periodisches Drehmoment übertragen werden, sodass das Pohlsche Pendel erzwungene Schwingungen ausführt. Die Geschwindigkeit des Motors wird durch die Spannung U_{Motor} geregelt.

1. Die freie, ungedämpfte Schwingung

Das Pendel wird ausgelenkt und losgelassen. Untersuchen Sie die ungedämpfte (in praxi schwach gedämpfte) Schwingung des Drehpendels und bestimmen Sie die Kreisfrequenz $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$, wobei T_0 die Schwingungsdauer ist. Führen Sie diesen Versuch mindestens fünfmal durch und bilden Sie den Mittelwert. Messen Sie bei jedem Versuch die Zeit, die das Pendel für mehrere Schwingungen braucht. Bestimmen Sie das Richtmoment D^* der Feder (Θ ist am Versuchsplatz angegeben).

2. Die freie, gedämpfte Schwingung

Bestimmen Sie das logarithmische Dekrement λ und die Schwingungsdauer T als Funktion des Stroms in der Wirbelstrombremse I. Bestimmen Sie hierzu bei Strömen I von 0,1 bis 0,5 A:

(a) die Schwingungsdauern T

(b) die logarithmischen Dekremente λ

Eine bequeme graphische Mittelung vieler Messpunkte erreicht man, indem man mehrere aufeinanderfolgende Amplituden (auf *einer* Seite der Pendelskala!) halblogarithmisch über der Nummer des Ausschlags n aufträgt. Mithilfe der Steigung der resultierenden Geraden ist eine Be-

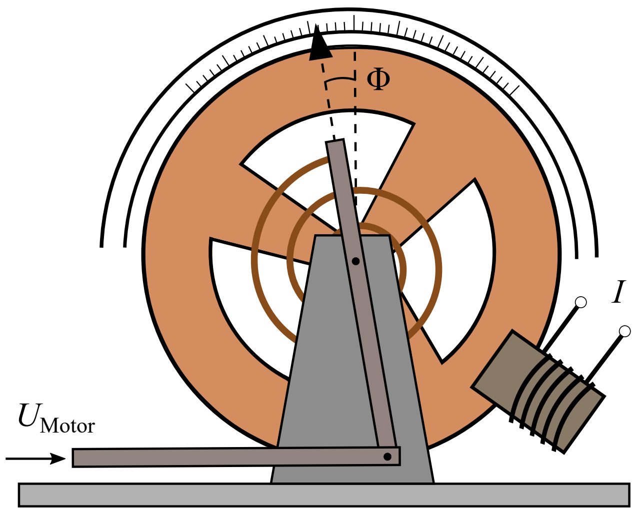


Abb. 1: Schematische Darstellung des Pohlschen Pendels.

stimmung des logarithmischen Dekrements λ möglich. Tragen Sie λ und T über der Stromstärke I auf. Diskutieren Sie die erhaltenen Kurven.

3. Die erzwungene, gedämpfte Schwingung

Da der Geschwindigkeitsregler am Motor nicht reproduzierbar eingestellt werden kann, ist vor Beginn der eigentlichen Messungen eine Kalibrierkurve aufzunehmen, die Motorkreisfrequenz Ω in Abhängigkeit von der Motorprüfspannung U_{Motor} beschreibt.
Nehmen Sie im Anschluss an die Kalibrierung die Resonanzkurven des Pohlschen Pendels auf, indem Sie die maximale Auslenkung A als Funktion von U_{Motor} (bzw. Ω) messen. Dabei empfiehlt es sich, von einem Punkt nahe der Resonanz ausgehend zu höheren und tieferen Frequenzen Ω zu messen. Wählen Sie die Messpunkte in der Umgebung des Resonanzfalls hinreichend dicht. Es empfiehlt sich ebenfalls, die Datenpunkte zur Übersicht bereits vor Ort in ein skizziertes(!) Diagramm einzutragen. Zu messen sind die Resonanzkurven des Schwingers bei drei verschiedenen Dämpfungen. Stellen Sie dazu die Stromstärke I in der Wirbelstrombremse nacheinander auf etwa 0,2, 0,3 und 0,5 A. Die Erregeramplitude bleibt konstant. Achten Sie beim Ablesen der Maximalauslenkung darauf, dass der Einschwingvorgang abgeklungen ist.
Tragen Sie A in Abhängigkeit von Ω für die verschiedenen Ströme in der Wirbelstrombremse I auf und diskutieren Sie die erhaltenen Kurven. Hierbei bietet es sich an, die drei Resonanzkurven in einem Diagramm darzustellen.