

Bestimmung der Gravitationskonstanten

Mit Hilfe eines sehr empfindlichen Drehmomentmessgerätes, einer *Drehwaage nach Coulomb*, soll die Anziehungskraft durch die Gravitation zweier Massen aufeinander gemessen werden.

Vorkenntnisse

Kraftfeld, Potential - Zweikörperproblem - Dreikörperproblem - Erdbeschleunigung - Träge und schwere Masse - Gravitationsgesetz - Gravitationskonstante - Gravitationswaage - Messmethoden - Systematische Fehler und deren Korrektur - Kosmische Geschwindigkeiten

Physikalische Grundlagen

Zwei Massen m_1 und m_2 , deren Schwerpunkte sich im Abstand r voneinander befinden, üben eine Kraft F vom Betrage:

$$F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \quad (1)$$

aufeinander aus. Dabei ist γ die Gravitationskonstante. Aufgrund der Kleinheit der Gravitationskraft benötigt man zu ihrem Nachweis eine sehr empfindliche Messapparatur.

Dieser Anforderung gerecht wird die im Prinzip von Coulomb konstruierte und von Cavendish 1798 zur Bestimmung der Gravitationskonstanten verwendete Drehwaage (Abb. 1). Sie besteht aus einem horizontalen Balken mit zwei Bleikugeln m_2 von je 15 g Masse an den Enden. Das Richtmoment des Torsionsbandes ist klein, die Schwingungsdauer der Drehwaage also groß (ca. 10 min).

Zur Vermeidung von Störungen durch Luftströmungen befindet sich das System in einem geschlossenen Gehäuse.

Die Stellung des Balkens wird über einen langen Lichtzeiger angezeigt; dies erlaubt die Bestimmung kleiner Drehwinkel mit hoher Genauigkeit.

Zwei größere Kugeln m_1 mit einer Masse von je 1.5 kg üben auf die kleinen Kugeln eine Kraft und damit auf das Gesamtsystem ein Drehmoment aus. Diesem Drehmoment wirkt das bei der Verdrehung des Torsionsbandes entstehende Richtmoment entgegen.

Aus dem sich ergebenden Drehwinkel und dem Drehmoment des Torsionsbandes lässt sich dann die Gravitationskonstante bestimmen.

Beide Größen werden durch zwei unterschiedliche Messmethoden gemessen.

Die Endausschlagsmethode

Im statischen Gleichgewicht (Lage I in Abb. 1) heben sich die aus der Massenanziehung und der Verdrehung des Torsionsbandes resultierenden Drehmomente gerade auf. Die Kraft auf jede der

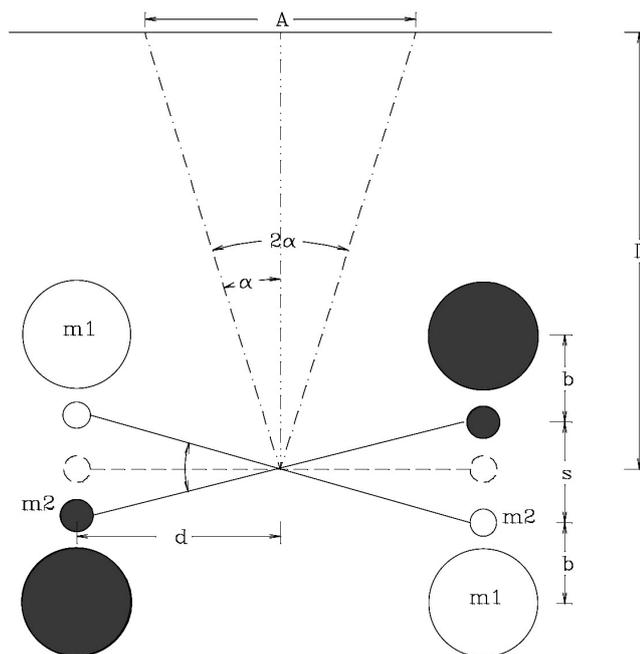


Abb. 1: Drehwaage nach Coulomb

kleinen Kugeln ist gemäß Gleichung (1) gegeben, also:

$$F = \gamma \frac{m_1 m_2}{b^2} \quad (2)$$

Das Gesamtdrehmoment ist demzufolge:

$$M_1 = 2 F d = 2 \gamma \frac{m_1 m_2}{b^2} d \quad (3)$$

Werden die Massen m_1 in die Lage II geschwenkt, wirkt dieses Drehmoment in die entgegengesetzte Richtung.

Die Drehwaage schwenkt dann in eine neue Gleichgewichtslage.

Zwischen den Lagen I und II stellt sich der Drehwinkel α ein, der über den Weg des Lichtzeigers gemessen wird (man beachte die Winkelverdoppelung durch Reflexion):

$$\alpha \cong \tan \alpha = \frac{A}{2L} \quad (4)$$

Das Drehmoment des Torsionsfadens kann aus der Schwingungsdauer T der Drehschwingung berechnet werden. Für die Schwingungsdauer gilt:

$$T^2 = 4 \pi^2 \frac{\Theta}{D} \quad (5)$$

Hierbei ist Θ das Trägheitsmoment der Torsionswaage, für das bei Vernachlässigung der Balkenmasse gilt:

$$\Theta = 2 m_2 d^2 \quad (6)$$

Das Richtmoment des Torsionsbandes D folgt daraus zu:

$$D = 8 \pi^2 \frac{m_2 d^2}{T^2} \quad (7)$$

Richtmoment D und Drehmoment M_2 des Torsionsbandes sind verknüpft durch:

$$M_2 = \frac{1}{2} D \alpha \quad (8)$$

In der statischen Ruhelage ist M_1 gleich M_2 . Somit folgt für die Gravitationskonstante:

$$\gamma = \frac{\pi^2 b^2 A d}{m_1 T^2 L} \quad (9)$$

Die Beschleunigungsmethode

Ausgangspunkt sei eine der Gleichgewichtslagen I oder II in Abb. 1. Nach dem Umschwenken der Massen m_1 wird die Gleichgewichtslage gestört, da auf die kleinen Kugeln jetzt durch die Massenanziehung ein Drehmoment in der entgegengesetzten Richtung wirkt.

Da das Drehmoment des Torsionsbandes zu diesem Zeitpunkt in die gleiche Richtung und mit der gleichen Größe (gilt in guter Näherung für $s \ll b$, also $(b+s)^2 \approx b^2$) wirkt, wird der Balken mit den kleinen Kugeln durch das doppelte Drehmoment in eine ungleichförmige Drehbewegung versetzt.

Ist a der Skalenausschlag von der Ausgangsposition an gerechnet, gilt für die Winkelbeschleunigung $\ddot{\alpha}$:

$$\ddot{\alpha} = \frac{d^2\alpha}{dt^2} = \frac{1}{2L} \frac{d^2a}{dt^2} \quad (10)$$

Die Drehbewegung wird beschrieben durch:

$$\Theta \ddot{\alpha} = 2 M_1 = 4 \gamma \frac{m_1 m_2 d}{b^2} \quad (11)$$

und:

$$\ddot{\alpha} = \frac{2 M_1}{\Theta} = 2 \gamma \frac{m_1}{b^2 d} \quad (12)$$

Bei einer Drehbewegung mit konstantem Drehmoment – und damit konstanter Winkelbeschleunigung – ist der Drehwinkel eine quadratische Funktion der Zeit:

$$\alpha = \frac{1}{2} \ddot{\alpha} t^2 \quad (13)$$

Somit folgt aus (4) und (13):

$$a = \ddot{\alpha} L t^2 \quad (14)$$

Nach dem Umschwenken der Kugeln kann für einen gewissen Zeitraum mit konstanter Winkelbeschleunigung gerechnet werden.

Der Fehler ist kleiner als 5 % für Zeiten $t < \frac{T}{10}$. Trägt man daher für diesen Zeitraum a gegen t^2 in einem Diagramm auf, dann gilt für die Steigung h der sich ergebenden Geraden:

$$h = \ddot{\alpha} L \quad (15)$$

Die Gravitationskonstante folgt dann aus den Gleichungen (12) und (15) zu:

$$\gamma = \frac{\ddot{\alpha} b^2 d}{2 m_1} = \frac{h b^2 d}{2 L m_1} \quad (16)$$

Experiment

Vorbereitende Aufgaben

Berechnen Sie den Wert der Erdbeschleunigung g . Verwenden Sie dabei die folgenden Werte:

Masse der Erde $\approx 5,98 \cdot 10^{24}$ kg

mittlerer Äquatorradius ≈ 6378 km

Versuchsaufgaben

Hinweis: Alle Versuchsteile sollen hier zusätzlich mit dem bereitgestellten Rechner bearbeitet werden!

1. Die Gravitationskonstante γ ist nach beiden angegebenen Methoden zu bestimmen.
Vor der eigentlichen Versuchsdurchführung wird zunächst die Stellung des Lichtzeigers in der vorgefundenen Endlage über mehrere Minuten beobachtet.
Da infolge äußerer Störungen kleine Schwankungen auftreten können, sollte die Beobachtungsdauer eine Schwingungsperiode (etwa 10 min) nicht unterschreiten.
Die Messergebnisse sind begleitend zur Messung in einem Diagramm darzustellen.
Die Zeit wird mit einer Stoppuhr gemessen, wobei die Messwerte alle 30 Sekunden erfasst werden sollten.
Das Umschwenken der Kugeln soll vorsichtig und ohne Anhalten der Stoppuhr in einem Augenblick erfolgen, in dem sich die Drehwaage nahezu in Ruhe befindet. Nach dem Umschwenken wird der Weg des Lichtzeigers in den ersten 2 Minuten alle 10 Sekunden abgelesen.
Diese Messwerte sind in einer Tabelle gesondert festzuhalten.
Anschließend genügt ein Ablesen alle 30 Sekunden.
Die gesamte Messung soll sich über einen Zeitraum von etwa einer Stunde erstrecken.
Schon während der Messung wird der Weg des Lichtzeigers als Funktion der Zeit graphisch dargestellt. Dabei soll die Zeichengenauigkeit der Messgenauigkeit entsprechen (zu erwartender Maximalausschlag ca. 40 cm).
Aus dem Diagramm wird die Schwingungsdauer T und der Weg des Lichtzeigers a ermittelt.
Für T soll eine Mittelung über mehrere Perioden erfolgen, da dieser Messwert quadratisch in die nach der Endausschlagsmethode zu bestimmenden Gravitationskonstanten eingeht.
Die Bestimmung von γ nach der Beschleunigungsmethode erfolgt aus der Auftragung der ersten 10 Messwerte für den Weg des Lichtzeigers über dem Quadrat der Zeit.
2. Der ermittelte Wert weicht vom tatsächlichen Wert ab, da der Einfluss der zweiten Kugel nicht berücksichtigt wurde. Die notwendige Korrektur ist zu berechnen.
3. Die Torsionswaage führt infolge der Luftreibung gedämpfte Schwingungen aus, deren Schwingungsdauer von der der ungedämpften abweicht. Der Fehler ist zu bestimmen, hierzu wird die Dämpfungskonstante der gedämpften harmonischen Schwingung aus dem ersten Diagramm gewonnen.

Besonders zu beachten

Infolge der langen Schwingungsdauer kommt die Drehwaage erst nach Stunden zur Ruhe. Der Versuch soll daher erst begonnen werden, wenn alle notwendigen Vorbereitungen getroffen sind.

Die Kugeln sollen zügig, aber dabei so vorsichtig umgelegt werden, dass Erschütterungen der Drehwaage vermieden werden.

Die Torsionswaage selbst darf unter keinen Umständen berührt werden. Der Lichtzeiger wird nach Reflexion an der Drehwaage noch ein weiteres Mal durch einen Planspiegel umgelenkt.

Dadurch ergibt sich eine kompaktere Versuchsanordnung. Da der zweite Umlenkspiegel jedoch feststeht, erfolgt hier keine Winkelverdopplung.

Die weiteren, zur Auswertung der Messungen notwendigen, Daten bezüglich der Torsionswaage können der am Messplatz ausliegenden Versuchsanleitung entnommen werden.