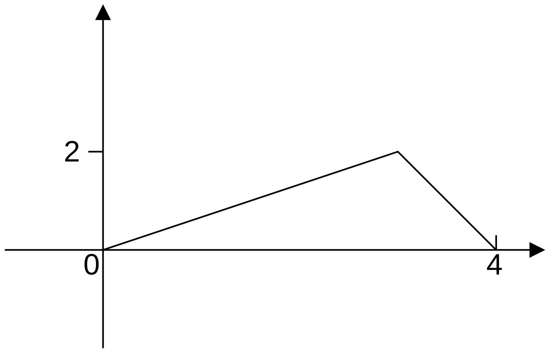
Rechenmethoden II — SoSe 2006

12. Übungsblatt — Abgabe: **18.07.06 (G2) / 19.07.06 (G1) 15:05h, HA-Kiste bei A306**

30. **Die Gitarrensaite (4 Punkte)**
Betrachten Sie die Situation einer fest eingespannten Saite, die beispielsweise bei einer Gitarre typischerweise nah an einem der Befestigungspunkte (Steg) angezupft wird. Anzupfen soll hier bedeuten: Auslenkung der Saite mit Anfangsgeschwindigkeit Null.

Verwenden Sie die Methode von d'Alembert zur Konstruktion einer grafischen Lösung der Wellengleichung zur Zeit $t = 0, 1, 2, 3, 4$. Dazu entnehmen Sie Saitenlänge, Auslenkung und Anzupfpunkt der Skizze und setzen die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle auf $c = 2$. Bitte diese Aufgabe ausreichend dokumentieren - mit 4 Skizzen allein ist es nicht getan! :)



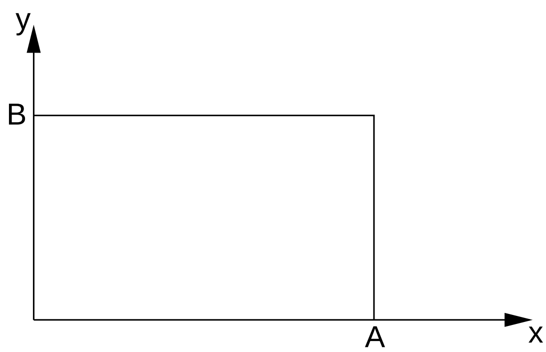
31. **Die schwingende Membran (6 Punkte)**
Gegeben sei eine Membran, die in einem Rechteck fest aufgehängt ist (siehe Abbildung). Die partielle Differentialgleichung, die die freie Schwingung in z-Richtung beschreibt, ist gegeben durch

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = 0.$$

(a) Geben Sie die Randbedingungen an.

(b) Lösen Sie die partielle Differentialgleichung durch einen Separationsansatz.

(c) Berechnen Sie die Eigenfrequenzen der Membran.



32. **Greensche Funktion (10 Punkte)**

Betrachten Sie folgende inhomogene, partielle Differentialgleichung (D ist ein Differentialoperator)

$$Dy(\vec{x}) = f(\vec{x}).$$

Die allgemeine Lösung setzt sich zusammen aus der Lösung $y_h(\vec{x})$ des homogenen Systems und einer partikulären Lösung $y_p(\vec{x})$ des inhomogenen Systems, wobei das Finden dieser Lösung nicht immer einfach ist. Findet man jedoch eine Funktion $G(\vec{x}, \vec{x}')$ für die gilt:

$$DG(\vec{x}, \vec{x}') = \delta(\vec{x} - \vec{x}'),$$

so hat man die partikuläre Lösung gefunden mit:

$$y_p(\vec{x}) = \int G(\vec{x}, \vec{x}')f(\vec{x}')d\vec{x}'$$

(a) Zeigen Sie, dass $y_p(\vec{x})$ tatsächlich Lösung der inhomogenen, partiellen Differentialgleichung ist.

(b) Berechnen Sie diese sogenannte Greensche Funktion $G(x, t)$ für die Wellengleichung, d.h.:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right] G(x, t) = 4\pi a^2\delta(x)\delta(at).$$

Hinweis: Lösung durch Fourier-Transformation, d.h. Fourier-Transformation $\rightarrow$ Auflösen der algebraischen Gleichung nach $\tilde{G}(k, \omega)$ $\rightarrow$ Fourier-Rücktransformation. Bei der Fourier-Rücktransformation beachten Sie die Lage der Polstellen und wählen Sie die Integrationswege so, dass $G(x, t < 0) = 0$ ist (d.h. Sie berechnen die *retardierte* Greensche Funktion). Für die Rücktransformation können Sie folgendes Integral verwenden:

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin(ax)}{x}dx = \begin{cases} 1, & a > 0 \\ 0, & a = 0 \\ -1, & a < 0 \end{cases}$$

Drücken Sie das Ergebnis schliesslich durch die Heaviside-Sprungfunktion (Theta-Funktion) aus:

$$\Theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$