INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG

Prof. Dr. W. Brenig
Dipl.-Phys. S. Grossjohann

Rechenmethoden II — SoSe 2006

6. Übungsblatt — Abgabe: **30.05.06 (G2) / 31.05.06 (G1) 15:05h, HA-Kiste bei A306**

16. **Legendre-Polynome (6 Punkte)**
Zeigen Sie, dass die Legendre-Polynome $P_n(x)$ ein orthogonales Funktionensystem auf dem Intervall $[-1,1]$ bilden, d.h. dass gilt:

$$(P_n, P_m) = \int_{-1}^{1} P_n(x) P_m(x) dx = \frac{2}{2n+1}\delta_{nm}.$$

Verwenden Sie zur Lösung die partielle Integration und die Darstellung der Legendre-Polynome durch die Formel von Rodriguez

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n.$$

Außerdem darf die Lösung des Integrals

$$\int_{-1}^{1}(x^2-1)^n dx = (-1)^n \frac{2^{2n+1} n!^2}{(2n+1)!}$$

verwendet werden.

17. **Cauchy-Schwarzsche Ungleichung (6 Punkte)**
Im Raum $\mathbb{L}^2$ der quadratintegrablen Funktionen (z.B. Wellenfunktionen der Quantenmechanik) ist das Skalarprodukt definiert durch

$$\langle f, g\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(x)} g(x) dx.$$

Weisen Sie nach, dass für dieses Skalarprodukt die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung gilt:

$$|\langle f, g\rangle|^2 \leq \langle f, f\rangle \langle g, g\rangle .$$

18. **Fourier-Entwicklung (8 +2 Punkte)**
Funktionen $f(x)$, die in den Grenzen $[a,b]$ periodisch sind, können mithilfe einer Fourier-Reihe als Summe trigonometrischer Funktionen dargestellt werden (Fourierentwicklung):

$$FR(f) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)$$

Dabei ist $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{b-a}$ die Kreisfrequenz mit der Periode $T = b-a$. Die Koeffizienten $a_n$ ($n \geq 0$) und $b_n$ ($n > 0$) erhält man durch

$$a_n = \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\cos\left(\frac{2n\pi x}{b-a}\right) dx, \qquad b_n = \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\sin\left(\frac{2n\pi x}{b-a}\right) dx$$

(a) Formen Sie die Fourierreihe in ihre komplexe Darstellung mit Koeffizienten $c_n$ um. Geben Sie dazu auch die $c_n$ als Funktion von $a_n, b_n$ an.

(b) Bestimmen Sie die Fourierentwicklung der $2\pi$-periodisch fortgesetzten Funktion

$$f(x) = x \quad \text{für} \quad x \in (-\pi, \pi).$$

(c) Plotten Sie Fourierentwicklung mit n=4, 8 und 64 Summanden mit einem geeignetem Programmpaket Ihrer Wahl. (**optional, 2 Zusatzpunkte**)