INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG

Prof. Dr. W. Brenig
Dipl.-Phys. S. Grossjohann

Rechenmethoden II SoSe 2006

11. Übungsblatt Abgabe: **11.07.06 (G2) / 12.07.06 (G1) 15:05h, HA-Kiste bei A306**

28. **Die Wellengleichung (14 Punkte)**
Zur Herleitung der Wellengleichung betrachten Sie ein System aus gleichen Massen (Masse m), die durch Federn gleicher Stärke (Federkonstante D) untereinander und mit den Wänden verbunden sind (siehe Abbildung). Die Federn seien bereits in der Gleichgewichtslage des Systems mit der Kraft K vorgespannt und der Gleichgewichtsabstand der Massen sei L_0.

(a) Stellen Sie die Bewegungsgleichung der n Massen für **longitudinale** (siehe Abb.) Schwingungen nach Newtonscher Mechanik auf:

$$ma_i = m\ddot{x}_i = F.$$

Beachten Sie dazu, dass die Kraft einer Feder nach dem Hookschen Gesetz direkt proportional zu ihrer Auslenkung gewählt werden kann, d.h. $F = Dx_i$.

(b) Stellen Sie erneut die Bewegungsgleichungen nach Newton auf, jedoch nun für die **transversalen Schwingungen** (siehe Abb.). Betrachten Sie dazu *kleine* Auslenkungen aus der Gleichgewichtslage, so dass Sie $\sin(\alpha) \sim \tan(\alpha)$ für kleine α verwenden können.

(c) Bestimmen Sie die Randbedingungen und lösen Sie die Bewegungsgleichungen am Beispiel eines Systems von nur 3 Massen. Sie erhalten 3 linear unabhängige Lösungen. Fertigen Sie dazu 3 Skizzen an, die die unterschiedlichen Schwingungen des Systems verdeutlichen.

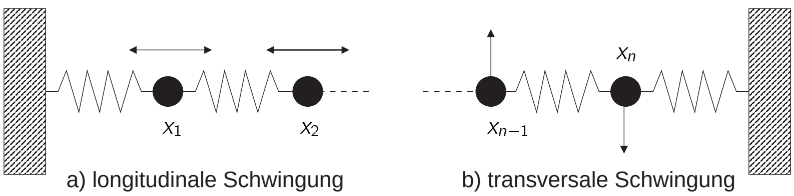
(d) Wie in der Beispielrechnung für die drei Massen, bzw Ihrer Skizze zu sehen, verteilen sich die Amplitudenverhältnisse sinusförmig über die Schwinger. Deshalb können Sie zur Lösung des Systems von n Massen folgendem Ansatz verwenden:

$$x_i(t) = Ca_i \cos(\omega t + \delta) = C \sin(\alpha i) \cos(\omega t + \delta), \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Bestimmen Sie α aus den Anfangsbedingungen und geben Sie alle möglichen Schwingungsfrequenzen des Systems an.

(e) Bilden Sie den Kontinuumslimes $n \to \infty$, $L_0 \to 0$, wobei folgende Bedingungen erfüllt sein müssen: 1.) die Gesamtlänge des Systems soll erhalten bleiben ($(n+1)/L_0 =$ const), 2.) die Massenbelegung soll konstant bleiben ($m/L_0 = \rho =$ const) und 3.) das Produkt aus Federlänge und Federkonstante soll gleich bleiben ($DL_0 =$ const). Bringen Sie die Bewegungsgleichung damit in die Ihnen bekannte Form der Wellengleichung

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}.$$



a) longitudinale Schwingung b) transversale Schwingung

29. **Die Gitarrensaite (6 Punkte)**
Betrachten Sie die Situation einer fest eingespannten Saite, die beispielsweise bei einer Gitarre typischerweise nah an einem der Befestigungspunkte (Steg) angezupft wird. Anzupfen soll hier bedeuten: Auslenkung der Saite mit Anfangsgeschwindigkeit Null.

Verwenden Sie die Methode von d'Alembert zur Konstruktion einer grafischen Lösung der Wellengleichung zur Zeit $t = 0, 1, 2, 3, 4$. Dazu entnehmen Sie Saitenlänge, Auslenkung und Anzupfpunkt der Skizze und setzen die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle auf $c = 2$. Bitte diese Aufgabe ausreichend dokumentieren - mit 4 Skizzen allein ist es nicht getan! :)