Prof. Dr. W. Brenig
Dipl.-Phys. S. Grossjohann

Rechenmethoden II — SoSe 2006

7. Übungsblatt — Abgabe: **13.06.06 (G2) / 14.06.06 (G1) 15:05h, HA-Kiste bei A306**

19. **Eigenschaften der δ-Funktion (6 Punkte)**
Die Wirkung der δ-Funktion ist definiert durch $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-a) = f(a)$. Sie ist daher keine Funktion im üblichen Sinne sondern eine sogenannte Distribution. Rechnen Sie folgende Eigenschaften nach:

   (a)
$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x), \quad a \in \mathbb{R}$$

   (b)
$$\delta\left(f(x)\right) = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{|f'(x_i)|}\delta(x - x_i)$$
   Dabei läuft die Summe über die Nullstellen der Funktion $f(x)$.

   (c) Wenden Sie (b) auf $\delta(x^2 - a^2)$ an.

20. **Fourier-Transformation (8 Punkte)**
Die Fourier-Transformation ist eine spezielle Form der Integraltransformation
$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)K(t,\omega)dt$$
mit Kern $K(t,\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{i\omega t}$:
$$F(\omega) = FT(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt, \qquad f(t) = FT^{-1}(F) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega t}d\omega.$$

   (a) Wenden Sie die Fourier-Transformation auf $f(t) = \frac{t}{t^2+1}$ an. Zeigen Sie, dass die Rücktransformation FT^{-1} von FT(f) wieder zurück auf f(t) führt.

   (b) Bestimmen Sie die Halbwertsbreite Δx der Gauss-Funktion $f(x) = e^{-x^2/a^2}$ (Funktionswert auf halber Höhe des Maximums) sowie entsprechend Δk für die Fouriertransformierte $F(k)$ und bilden Sie das Produkt $\Delta x \Delta k$. Zur Lösung des Fourierintegrals geschickt quadratisch ergänzen zur Rückführung auf ein Gaussintegral, dessen Lösung Ihnen bekannt ist.

21. **Fourier-Transformation, Faltungstheorem & δ-Funktion (6 Punkte)**
Aus der Vorlesung ist Ihnen bekannt, dass man Gleichungen folgenden Typs mit Fouriertransformation, Faltungssatz und Fourier-Rücktransformation lösen kann:
$$f(x) = g(x) + \int_{-\infty}^{\infty} K(x-y)f(y)dy.$$

   (a) Geben Sie den formalen Rechenweg anhand der gegebenen Gleichung an.

   (b) Berechnen Sie $f(x)$ für $g(x) = -i\sqrt{2\pi}\delta'(x)$ und Kern $K(x) = -\sqrt{2\pi}\delta''(x)$.

Für den Umgang mit Ableitungen der δ-Funktion denken Sie an partielle Integration.