INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG

Prof. Dr. W. Brenig
Dipl.-Phys. S. Grossjohann

Rechenmethoden II SoSe 2006

5. Übungsblatt Abgabe: **23.05.06 (G2) / 24.05.06 (G1) 15:05h, HA-Kiste bei A306**

13. **Reihen (7 Punkte)**
Zeigen Sie, dass
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2+a^2} = \frac{\pi}{a}\coth(\pi a)$$
gilt. Dazu gehen Sie wie folgt vor:
    (a) Rechnen Sie kurz nach, dass die Funktion $n_f(z) = \pi\cot(\pi z)$ Pole genau bei $z = n$ hat.
    (b) Bestimmen Sie alle Residuen von $f(z)n_f(z)$ mit $f(z) = \frac{1}{z^2+a^2}$.
    (c) Ist es Ihnen nun möglich, den Residuensatz "rückwärts" anzuwenden, d.h. die Reihe $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2+a^2}$ als eine Summe über Residuen aufzufassen und daraus ein Kontur-Integral über ganz $\mathbb{C}$ zu machen?
    (d) Beweisen Sie schließlich obige Behauptung indem Sie zeigen, dass das Integral verschwindet wenn die Konturgrenzen ins Unendliche geschoben werden. Sie dürfen dazu im Vorgriff Aufgabe 15 verwenden.

14. **Mittag-Lefflerscher Entwicklungssatzes (7 Punkte)**
Beweisen Sie den Mittag-Lefflerschen Entwicklungssatz: Geben sei eine Funktion $f(z)$ mit einfachen Polen bei $z = a_1, a_2, \ldots$ sowie dazugehörigen Residuen $b_1, b_2, \ldots$. Weiterhin seien C_N Kreise vom Radius R_N, die nicht durch einen Pol verlaufen und auf denen $|f(z)| < M$ mit M unabhängig von N, sowie $R_N \to \infty$ für $N \to \infty$. Dann besagt der Entwicklungssatz von Mittag-Leffler, dass
$$f(\eta) = f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \left\{ \frac{1}{\eta - a_n} + \frac{1}{a_n} \right\}.$$
Vorgehensweise: Wenden Sie erneut den Residuensatz "rückwärts" an - dieses mal auf die Funktion $\frac{f(z)}{z-\eta}$. Dazu bestimmen Sie zuerst deren Residuen. Für $\eta = 0$ erhält man aus dem Residuensatz eine weitere Gleichung, die nach Subtraktion voneinander direkt auf den Mittag-Lefflerschen Entwicklungssatz führt. Bilden Sie den Grenzwert des Kontour-Integrals über C_N für $R \to \infty$.

15. **Partialbruchzerlegung des Cotangens (6 Punkte)**
Zeigen Sie, dass
$$\cot z = \frac{1}{z} + \sum_n \left(\frac{1}{z - n\pi} + \frac{1}{n\pi} \right), \quad n = \pm 1, \pm 2, \ldots$$
gilt. Betrachen Sie dazu die Funktion $f(z) = cot(z) - \frac{1}{z}$ und wenden Sie den Mittag-Lefflerschen Entwicklungssatz an. Dazu ist es nötig, dass $f(z)$ auf dem Kreis C_N beschränkt ist und keiner der Pole auf dem Rand des Kreises liegt.
    (a) Wählen Sie deshalb den Radius R_N des Kreises C_N so, dass die Pole von $f(z)$ auf der reellen Achse nicht getroffen werden.
    (b) Zeigen Sie anschließend die Beschränktheit von $f(z)$ für $\mathrm{Im}(z) \neq 0$.

Achtung: Aufgabe ist es, obige Beziehung zu zeigen, nicht (a) und (b) zu bearbeiten und dann den Stift aus der Hand legen. Wie schon auf dem letzten Aufgabenblatt sind vermeintliche Teilaufgaben lediglich Lösungshilfen.