INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG

Prof. Dr. W. Brenig
Dipl.-Phys. S. Grossjohann

Rechenmethoden II SoSe 2006

2. Übungsblatt Abgabe: **02.05.06 (G2) / 03.05.06 (G1) bis 14:55h, HA-Kiste bei A306**

1. **Betrag, Real- und Imaginärteil (4 Punkte)**

   (a) Gegeben seien zwei Funktionen $z := i - 1$ und $w := \frac{i}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}$. Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil, sowie den Betrag von $z + w$, zw, w^{-1} und z/w.

   (b) Geben Sie Real- und Imaginärteil folgender Ausdrücke an:

   $$\text{(i)}\ \frac{z+1}{z-1} \quad \text{(ii)}\ \log(i^{2i})$$

2. **Ein paar Skizzen (4 Punkte)**
   Skizzieren und beschreiben Sie folgende Teilmengen in $\mathbb{C}$:

   (a) $M_1 := \{z \in \mathbb{C};\quad 0 < \mathrm{Re}(iz) < 1\}$ (b) $M_2 := \{z \in \mathbb{C};\quad |z-2| + |z+2| = 5\}$
   (c) $M_3 := \{z \in \mathbb{C};\quad |z| = \mathrm{Re}(z) + 1\}$ (d) $M_4 := \{z \in \mathbb{C};\quad |z-i| = |z-1|\}$

3. **Die Einheitswurzel und ein paar Beweise (4 Punkte)**

   (a) Lösen Sie die Gleichung $z^5 = 1$

   (b) Zeigen Sie $\cos^2 z + \sin^2 z = 1, \quad z \in \mathbb{C}$

   (c) Zeigen Sie $|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2), \quad z, w \in \mathbb{C}$

4. **Analytische Funktionen (4 Punkte)**
   Prüfen Sie, ob die folgenden Funktionen holomorph sind:

   $$\text{(a)}\ \bar{z} \quad \text{(b)}\ e^{iz} \quad \text{(c)}\ \sin z \quad \text{(d)}\ \cos \bar{z}$$

5. **Verzweigungspunkte, Riemannsche Blätter (4 Punkte)**
   Betrachten Sie die die Funktion $w = (z^2 + 1)^{1/2}$.

   (a) Zeigen Sie, dass die Funktion Verzweigungspunkte bei $\pm i$ besitzt.

   (b) Rechnen Sie nach, dass die Funktion bei einem vollständigen Umlauf um die zwei Verzweigungspunkte kein Vorzeichen wechselt.

   (c) Zeichnen Sie eine Verzweigungslinie.

   (d) Plotten Sie Re(w) und Im(w).