

### 1. Mini-Fragen

Bitte jedes verwendete Symbol benennen/erklären.

- Geben Sie den Mittelwert einer klassischen Observablen  $A$  an i.) als Ensemblemittel und ii.) mithilfe der Häufigkeitsverteilung.
- Welche Eigenschaften muss der statistische Operator erfüllen?
- Ihnen ist die Entalpie  $I(S, P, N)$  bekannt. Geben Sie das totale Differential  $dI$  an und überführen Sie  $I(S, P, N)$  durch einen Variablenwechsel per Legendre-Transformation in die freie Energie  $F(T, V, N)$ .
- Welcher Ordnung ist der Phasenübergang flüssig  $\Leftrightarrow$  gasförmig (mit Begründung)?
- Wie lautet die Bose- und die Fermi-Verteilung?
- Wann und warum verwendet man die Sommerfeld-Entwicklung?

### 2. Kreisprozess

Den Brayton-Joule Kreisprozess kann man sich idealisiert folgendermaßen vorstellen: Im ersten Schritt (adiabatisch) wird die Luft verdichtet, wobei die Temperatur steigt. Im Erhitzer wird sie weiter erhitzt (isobar) um sich dann in Schritt 3 bei einer Expansion abzukühlen (adiabatisch). Nun gibt es zwei Möglichkeiten, den Prozess weiter zu führen. Man kann die Luft entweder entweichen lassen und Frischluft ansaugen (offene Prozessführung  $\rightarrow$  Gasturbine) oder man bringt in einem Kühler die Luft wieder auf Ausgangstemperatur zurück (geschlossene Prozessführung, Isobar). Betrachten Sie die geschlossene Prozessführung mit einem idealen Gas als Arbeitsmedium.

- Zeichnen Sie das  $(p, V)$  sowie das  $(S, T)$ -Diagramm.
- Berechnen Sie für jeden der vier Schritte übertragene Wärme und geleistete Arbeit.
- Berechnen Sie den Wirkungsgrad  $\eta$  der Maschine.

### 3. Zweiniveau System

Die Energieeigenwerte eines Systems seien  $E_n = (n + 1/2)\hbar\omega$  mit  $n = 0, 1$ .

- Berechnen Sie die Zustandssumme in der kanonischen Gesamtheit.
- Berechnen Sie daraus die Energie und die spezifische Wärme  $C_V$  für das System.
- Wie verhalten sich  $C_V$  und  $E$  für  $T \rightarrow \infty$  und  $T \rightarrow 0$ ? Interpretieren Sie Ihr Ergebnis.
- Geben Sie ohne Rechnung den Wert der Entropie für  $T \rightarrow \infty$  und  $T \rightarrow 0$  an. Erläutern Sie dieses Ergebnis kurz in Worten.

*Bitte Rückseite beachten  $\Rightarrow$*

#### 4. Thermodynamische Relationen

Zeigen Sie, dass für die Enthalpie  $I(S, P, N)$  mit  $dI = TdS + VdP + \mu dN$  folgende Beziehungen gelten:

(a)

$$\left(\frac{\partial I}{\partial T}\right)_{V,N} = C_V + \frac{\alpha V}{\kappa_T}$$

(b)

$$\left(\frac{\partial I}{\partial V}\right)_{T,N} = \frac{\alpha T - 1}{\kappa_T}$$

Dabei sind  $\alpha$  und  $\kappa_T$  gegeben durch  $\alpha = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_{P,N}$  und  $\kappa_T = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_{T,N}$ .

Hilfen zu (b): Ersetzen Sie für diese Rechnung die Enthalpie  $I$  durch die zugehörige Legendre-Transformierte der inneren Energie  $E$  mit  $dE = TdS - PdV + \mu dN$ . Eventuell hilft Ihnen dann nachfolgende Beziehung, die bei Verwendung allerdings kurz nachgewiesen werden müsste:

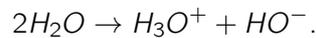
$$\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_{T,N} = T \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_{V,N} - P.$$

#### 5. Reaktionsgleichung

Das Massenwirkungsgesetz lautet

$$K(P, T) = e^{-\beta \sum \nu_i \mu_i(P, T)} = \prod c_i^{\nu_i}$$

Mit molarer Stoffgleichgewichtskonzentrationen  $c_i$  und stöchiometrischen Koeffizienten  $\nu_i$ . Bekanntlich hat Wasser einen pH-Wert von 7 (neutral), wobei der pH-Wert der negative dekadische Logarithmus der Hydronium Ionen-Konzentration ( $OH_3^+$ ) ist. Berechnen Sie die Gleichgewichtskonstante  $K(P, T)$  der sogenannten Autoprotolyse des Wassers. Die zugehörige chemische Reaktion lautet



Sauerstoff hat ein molares Gewicht von 16g/mol, Wasserstoff 1g/mol. 1 Liter Wasser wiegt 1000g.

#### 6. Fermigas

Die Zustandsdichte  $\Omega(\epsilon)$  für ein eindimensionales, ideales Fermigas ( $N$  Fermionen) ist gegeben durch

$$\Omega(\epsilon) = d \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}.$$

(a) Bestimmen Sie  $d$  aus der Normierung.

(b) Berechnen Sie das chemische Potential  $\mu$  für tiefe Temperaturen mit Hilfe der Sommerfeld-Entwicklung.

(c) Bestimmen Sie das Hoch- ( $T \rightarrow \infty$ ) und das Tieftemperaturverhalten ( $T \rightarrow 0$ ) der spezifischen Wärme.