

1. Dreidimensionaler harmonischer Oszillator

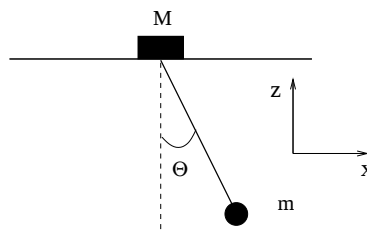
Ein Massenpunkt mit Masse m bewegt sich im Potential

$$V(x, y, z) = \lambda |\vec{r}|^2 \quad \vec{r} = (x, y, z) \quad \lambda > 0.$$

- (a) Geben Sie die Lagrangefunktion und die Gesamtenergie des Systems in ebenen Polarkoordinaten an. Bestimmen Sie zyklische Koordinate und die zugehörige Erhaltungsgröße, den Drehimpuls L .
- (b) Verwenden Sie den Drehimpuls, um die Winkelabhängigkeit der Energie zu eliminieren. Ermitteln und skizzieren Sie das daraus resultierende effektive Potential V_{eff} für die Fälle $L = 0$ und $L \neq 0$. Argumentieren Sie anhand Ihrer Skizzen, wie die Bahnen qualitativ aussehen. Bestimmen Sie außerdem mögliche Extrema ($r_0, V_{\text{eff}}(r_0)$) des effektiven Potentials. Wo liegen die Umkehrpunkte (d.h., welches sind die extremalen Radien r bei gegebenem E und L)?
- (c) Folgern Sie aus der Drehimpulserhaltung $\frac{d}{dt} = \frac{L}{mr^2} \frac{d}{d\varphi}$ und ersetzen Sie im Ausdruck für die Energie die zeitliche durch eine Winkelableitung.

2. Ein Pendel

Ein Klotz der Masse M gleitet reibungsfrei auf einer Ebene. An diesem Klotz ist über einen masselosen Faden der Länge l eine zweite Masse m angehängt. Es wirke die Schwerkraft $\vec{K} = -mg\vec{e}_z$.

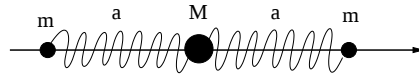


- (a) Stellen Sie die Lagrangefunktion in geeigneten generalisierten Koordinaten auf und entwickeln Sie diese nach Θ bis zur 2. Ordnung um das Gleichgewicht.
- (b) Stellen Sie die BWGL für dieses System auf.
- (c) Bestimmen Sie die Schwingungsfrequenz des Pendels für kleine Schwingungen und $M \gg m$.

Bitte wenden!

3. Dreiatomiges Molekül

Betrachten Sie ein einfaches Modell eines Kohlenstoffdioxid-Moleküls (Skizze). Die Atome sollen sich hierbei nur in einer Dimension bewegen können. Der Gleichgewichtsabstand der Sauerstoffatome zum Kohlenstoffatom sei a .



(a) Schreiben Sie die Lagrangefunktion in der Form

$$L(x, \dot{x}) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 (T_{ij} \dot{x}_i \dot{x}_j - V_{ij} x_i x_j)$$

und bestimmen sie die Koeffizienten T_{ij} und V_{ij} .

(b) Bestimmen Sie die zugehörigen Eigenfrequenzen und Eigenvektoren.

(c) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Bewegungsgleichung.

4. Freier Fall mit Hamilton-Jacobi.

Ein Teilchen in einer Dimension im Schwerfeld hat die Hamiltonfunktion

$$H = \frac{p^2}{2m} + mgz.$$

Stellen Sie die Hamilton-Jacobi-DGL auf und setzen Sie für die Prinzipalfunktion $S = W(z, E) - Et$ an. Bestimmen Sie W und geben Sie die Wirkungsfunktion S an. Bestimmen Sie daraus die Bahnkurve $z(t)$.

$$\text{Hinweise: } \int \sqrt{ax + b} dx = \frac{2}{3a}(ax + b)^{3/2}, \quad \frac{\partial S}{\partial E} = \beta.$$

5. Trägheitstensor

Bestimmen Sie den Trägheitstensor für eine Kugel mit Radius R und der Dichteverteilung $\rho = a \sin \theta$.