INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG

Prof. Dr. W. Brenig
Dr. R. Darradi

Elektrodynamik SoSe 2009

12. Übungsblatt Abgabe: **Dienstag, den 30.06.2009 um 11:25h, Hausaufgabenkiste bei A316**

1. **Skin-Effekt (8 Punkte)** Bei guten Leitern und hohen Wechselstromfrequenzen steigt der Widerstand eines Leiters mit der Frequenz an, weil der Strom nicht mehr gleichmäßig über den Leiterquerschnitt verteilt ist, sondern sich auf dessen Oberfläche beschränkt (Skin-Effekt). Betrachten Sie in dieser Aufgabe einen langen zylindrischen Leiter (in z-Richtung) mit Radius R und Leitfähigkeit σ. Berechnen Sie das elektrische Feld im Leiter.

   (a) Da wir nur an periodischen Lösungen interessiert sind, machen Sie den Ansatz $\vec{E} = E(r)e^{-i\omega t}\vec{e}_z$ und zeigen Sie, indem Sie die Rotation von

   $$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

   bilden, dass $E(r)$ mit $d = \sqrt{2/(\omega\mu\sigma)}$ die Gleichung

   $$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dE(r)}{dr}\right) = -\frac{2i}{d^2}E(r) \tag{1}$$

   erfüllen muss.

   (b) Lösen Sie die Differentialgleichung (1) für $E(r)$ innerhalb des Zylinders und diskutieren Sie insbesondere die Fälle $R \gg d$ und $R \ll d$.
   Hinweis: Der Leiter soll als lineares Medium angenommen werden. In der Maxwell-Gleichung

   $$\frac{1}{\mu}\operatorname{rot}\vec{B} = \vec{j} + \varepsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

   kann bei guten Leitern der Verschiebungsstrom vernachlässigt werden. Denn mit $\vec{j} = \sigma\vec{E}$ und der typischen Zeitskala τ, auf der $\vec{E}$ varriert (Schwingungsperiode), können wir

   $$\vec{j} + \varepsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \approx \sigma\vec{E} + \frac{\varepsilon\vec{E}}{\tau}$$

   abschätzen und für $\tau \gg \varepsilon/\sigma$ gilt

   $$\frac{1}{\mu}\operatorname{rot}\vec{B} = \vec{j} = \sigma\vec{E}\,.$$

   Gleichung (1) lässt sich mit der Substitution $r = \frac{d}{\sqrt{2i}}u$ auf eine Standard-Differentialgleichung der mathematischen Physik zurückführen.

2. **Vergütungsschicht (6 Punkte)**
   Eine dielektrische Schicht mit der Dielektrizitätskonstanten ϵ_2 ist durch die Ebenen $x_3 = 0$ und $x_3 = d$ begrenzt und befindet sich zwischen zwei Medien mit ϵ_1 für $x_3 < 0$ und ϵ_3 für $x_3 > d$. Alle drei Medien seien ungeladen und nicht-magnetisch. Eine ebene elektromagnetische Welle falle vom Gebiet $x_3 < 0$ kommend senkrecht auf die Schicht ein.

   (a) Welchen Randbedingungen müssen die Felder bei $x_3 = 0$ bzw. $x_3 = d$ erfüllen?

   (b) Berechnen Sie die Amplituden der Felder für die reflektierte A^R_{ges} und die transmittierte Welle A^T_{ges} für diese Anordnung. Dabei müssen Mehrfachreflexionen berücksichtigen. Führen Sie die folgenden Abkürzungen für die Verhältnisse der Amplituden bei der einfachen Reflexion und Brechung an einer Grenzfläche ein: r_{12} Licht fällt aus dem

Medium 1 auf das Medium 2 ein und wird reflektiert; r_{21}: Licht fällt aus dem Medium 2 auf das Medium 1 ein und wird reflektiert. Die Koeffizienten r_{23}, t_{12} und t_{21} seien analog definiert. Zeigen Sie:

$$A^R_{ges} = \left(r_{12} + \frac{t_{21} r_{23} t_{12} \mathrm{e}^{\mathrm{i}2k_2 d}}{1 - r_{23} r_{21} \mathrm{e}^{\mathrm{i}2k_2 d}} \right) A_0 \ . \tag{2}$$

k_2 ist der Wellenvektor im Medium 2; A_0 ist die Amplitude der einfallenden Welle.

(c) Sei $\epsilon_1 = 1$ (Luft) und $\epsilon_3 = n^2$ (Glas). Zeigen Sie, dass für $\epsilon_2 = n$ die Reflexion verschwindet (Vergütung). Wie muß man d wählen?
Zeigen Sie zunächst:

$$r_{ij} = \frac{\sqrt{\epsilon_i} - \sqrt{\epsilon_j}}{\sqrt{\epsilon_i} + \sqrt{\epsilon_j}}; \text{ und } t_{ij} = \frac{2\sqrt{\epsilon_i}}{\sqrt{\epsilon_i} + \sqrt{\epsilon_j}} \ .$$

Drücken Sie alle auftretenden Koeffizienten durch n aus und setzen Sie diese in Gleichung (2) ein.
(Zahlenbeispiel: typischer Brechungsindex $n = 1.6$, Wellenlänge von sichtbarem Licht in Luft: $\lambda = 0.5\mu m$).

3. **Zerfließendes Wellenpaket (6 Punkte)**
Ein Gauß'sches Wellenpaket

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(k)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx - \omega(k)t)}\, \mathrm{d}k \qquad \text{mit}$$
$$f(k) = f_0\, \mathrm{e}^{-\alpha(k-k_0)^2} \qquad \alpha > 0$$

bewege sich in einem Medium mit Dispersionsrelation

$$\omega(k) = \omega_0 + v_g(k - k_0) + \beta(k - k_0)^2 \, .$$

Berechnen Sie $u(x,t)$ und bestimmen Sie die Halbwertsbreite $\Delta u(t)$ des Wellenpaketes sowie die Lage des Maximums von $|u(x,t)|$ und diskutieren Sie deren zeitliches Verhalten.

Hinweis: Das allgemeine Gaußsche Wellenpaket hat die Form $f(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{\frac{-t^2}{2\sigma^2}}$, mit σ als Halbwertsbreite.